

大学物理学 (理论)

力学复习资料

作者：24 级钱学组

组织：西安交通大学钱学森书院学业辅导中心

时间：June 15, 2025

版本：1.0.1

功崇惟志　业广惟勤

前言

本资料是由钱学森班几位有过物理竞赛经历的同学共同编写的、面向全体工科同学的大学物理学习指导. 在读者开始正式阅读本资料前，笔者有如下几点想对诸位说明：

首先，笔者想来谈谈大学物理这门课程的学科特点. 对于交大的工科生来说，大学物理是一门学的难、考的简单的科目. 也许读者上课听得云里雾里，但请你们放心，从往年的真题来看，大物的考题难度与作业题相当，低于各高校的强基考试，其计算量、思维量要远远小于高考物理的压轴题. 因此，如果只是为了应付考试，读者只需掌握好基本概念、认真做作业即可，**在此基础上，可以选择性阅读每章的“概念剖析”和“真题练习”部分**.

但是，请诸位不要因为大物的考试题简单、高分众多就轻视了大物的学习. 大学物理所学到的知识，是几乎所有工科专业课程的基础. 例如，力学是大家大二都将学习的《理论力学》的前置知识，电学部分包含了《电路》的基本思想和《电磁场理论》的基本概念 …… 因此，物理的基础打的越扎实，日后专业课的学习就会越游刃有余.

然而，目前大物教材的内容安排远远做不到让学有余力的同学提高物理素养、夯实工科理论基础，读者自行去阅读普通物理教材又会出现内容过难、边角知识太多、学习成本较大的问题.

为了尝试解决这对矛盾，满足同学们的学习需要，24 级钱班部分同学编写了这本《大学物理学》复习资料. 在这本资料中，笔者一方面对大物教材中的基础知识做了回顾总结，对老师在课堂上讲过的难点疑点做详细的剖析；另一方面，笔者在普通物理的范围内选取了部分主干知识点加入本书，作为提供给读者的提高阅读材料.

在总体结构安排上，本资料的力学部分共安排了五个章节，分别是运动学、牛顿定律、功能关系、刚体和狭义相对论. 在每个章节内，又分为考情速递、概念剖析、真题演绎、附录（知识延伸）和习题扩展几个部分. 同时，笔者对所有超出考纲的知识点都进行了高亮标注. 希望通过这样的安排，读者能够根据自己的情况和目标，各取所需、学有所得.

值得注意的是，本资料的发布形式将于过去钱学组发布资料的方式有所不同. 为了帮助同学们更好地使用本资料，钱学组将采用逐章发布的形式来发布本资料，届时请同学们注意学组的实时动态，希望本资料能够帮助到希望学习的你.

最后，对为本资料付出时间与心血的志愿者们表示诚挚的感谢！同时感谢学组和学辅在本资料编写中给予的支持！

24 级钱学组

2025 年 6 月

参与编写本资料的志愿者名单及分工如下：

- 童瀚文（自动化钱 2401）：内容规划、主体撰写、题目编辑
- 石欣浓（能动钱 2401）：排版、绘图、审核、真题题解撰写
- 杜尚艺（能动 2409）：内容规划、题目选取、例题题解撰写

目录

目录 ii

第一部分　力学 1

第 1 章　运动学 2

1.1 引言 . . . 2
1.2 考情速递 . . . 2
1.3 概念剖析 . . . 2
1.3.1 质点位置的确定方法 . . . 2
参照系 . . . 3
1.3.2 坐标系 . . . 3
直角坐标系 . . . 3
极坐标系和球坐标系 . . . 4
自然坐标系 . . . 4
1.3.3 运动学中的基础物理量 . . . 7
矢量和标量 . . . 7
求导那些事 . . . 8
矢量求导举例 . . . 11
1.3.4 曲线运动 . . . 11
圆周运动的加速度 . . . 11
一般曲线运动的加速度 . . . 13
曲率半径的几何意义 . . . 13
曲率半径的计算方法 . . . 14
曲率半径计算题 . . . 15
1.3.5 运动方程的应用 . . . 17
1.4 真题练习 . . . 19
1.5 内容扩展 . . . 22
1.5.1 极坐标系和球坐标系 . . . 22
极坐标系中的加速度 . . . 22
球坐标系简介 . . . 23
1.5.2 相对运动 . . . 25
1.5.3 习题扩展 . . . 25

第 2 章　牛顿定律 31

2.1 引言 . . . 31
2.2 考情速递 . . . 31
2.3 概念剖析 . . . 31
2.3.1 微元法及其在力学中的应用 . . . 31
2.3.2 定质量的牛顿第二定律 . . . 35
2.3.3 惯性系和非惯性系 . . . 37
惯性系和非惯性系概述 . . . 37
特殊的惯性系——自由落体参考系 . . . 38
平动非惯性系和平移惯性力 . . . 39
转动非惯性系和惯性离心力 . . . 42
2.3.4 动量与冲量 . . . 43
动量定理和冲量积分 . . . 43
2.3.5 斜碰 . . . 43
简单冲击问题 . . . 44
2.3.6 变质量动力学初步 . . . 45
2.4 真题练习 . . . 47
2.5 内容扩展 . . . 49
2.5.1 惯性离心力和科里奥利力的推导 . . . 49
基本设定 . . . 49
加速度变换公式 . . . 49
惯性力的引入 . . . 49
物理意义 . . . 50
2.5.2 质心及质心运动定理 . . . 51
质心的计算 . . . 51
质心运动定理 . . . 52
2.5.3 习题扩展 . . . 54

第 3 章 功能关系 62
3.1 引言 . . . 62
3.2 考情速递 . . . 62
3.3 概念剖析 . . . 62
3.3.1 变力做功 . . . 62
3.3.2 动能定理 . . . 63
3.3.3 势能和保守力 . . . 63
保守力 . . . 63
势能 . . . 64
势能和保守力的简单应用 . . . 66

3.3.4 能动量综合问题 67
3.3.5 质点系动能定理和机械能守恒 74
3.4 真题演绎 76
3.5 知识拓展 81
3.5.1 能量法判断平衡类型 81
稳定平衡 82
不稳定平衡 82
随遇平衡 82
总结对比 83

第 4 章 刚体力学 **86**
4.1 引言 86
4.2 考情速递 86
4.3 知识剖析 86
4.3.1 概述 86
4.3.2 刚体基本知识 87
自由度 87
刚体的速度 88
平动速度 88
转动速度（角速度） 88
刚体上某点的速度 88
4.3.3 力矩和冲量矩 89
力矩 89
冲量矩 90
4.3.4 转动惯量 90
定义及其物理意义 90
常见刚体的转动惯量公式 91
转动惯量的其他计算方法 91
转动惯量的特点 93
4.3.5 角动量及角动量守恒 93
角动量 93
角动量定理 94
角动量守恒定律 95
4.3.6 转动定律 97
4.3.7 柯尼希定理及刚体的动能 99
柯尼希定理 99
柯尼希定理的数学推导 99

柯尼希定理在刚体中的应用 100
定轴转动刚体的动能 101
4.4 真题演绎 103
4.5 知识扩展 111
4.5.1 进动 111

第 5 章 狭义相对论 **113**
5.1 引言 113
5.2 考情速递 113
5.3 知识剖析 113
5.3.1 洛伦兹变换、尺缩公式和钟慢公式 113
钟慢 114
尺缩 114
注意事项 115
5.3.2 速度变换 117
5.3.3 关于能量 118
5.4 真题演绎 118
5.5 知识拓展 121
5.5.1 关于洛伦兹变换和尺缩、钟缓公式 121

第一部分

力学

第 1 章 运动学

1.1 引言

在物理学的宏伟殿堂中，力学犹如一座坚实的基石，而运动学则是这座基石的精妙起点. 运动学作为力学的重要分支，专注于研究物体的运动规律，不涉及运动的成因，而是通过对位置、速度、加速度等基本物理量的精确描述，揭示物体运动的本质特征. 它不仅是理解力学体系的关键，更是深入探索物理世界的重要工具.

在本章中，我们将深入探讨运动学的核心内容，逐步构建起运动学的理论框架. 从质点位置的表示到三种坐标系的运用，从位移、速度、加速度的矢量特性到自然坐标系下的运动分析. 我们将重点剖析加速度的法向与切向分解，深入理解曲率半径的意义，通过运动方程的求导计算速度与加速度，并介绍速度和加速度在不同参考系中的变换规律. 这些内容不仅是考试中的高频考点，学习中的理解难点，更是物理学中不可或缺的基础知识.

通过本章的学习，你将不仅能够掌握运动学的基本概念和计算方法，还能通过具体的真题演练，消除对定义的典型误解，建立学习物理的信心. 同时，我们精心设计的拔高题目和知识延伸部分，将帮助你拓展思维，提升物理素养，为后续学习理论力学奠定坚实的基础. 让我们一同开启这段精彩的运动学之旅，探索物体运动的奥秘吧!

1.2 考情速递

先说结论：难度不大，大部分为送分题，少部分考验计算能力，对高数知识有一定要求. 考察方式以**简单计算、概念判断**为主，主要放在选择、填空、简答的第一题，且主要设计一维的运动学场景. 主要应用的数学知识为简单的求导运算和简单的微分方程知识. 因此，对于考试来说，运动学并不是复习重难点，为了减轻同学们的学习负担，对于本资料中所有超出考试范围的知识点，笔者均会使用高亮进行提示. 但鉴于运动学中一些重要思想对后续物理的学习有重要的铺垫和启发作用，因此笔者强烈建议读者学习和了解本章高亮的拓展内容. 另外，正文中为了保证知识的连续性，将一些详细展开的内容放在了末尾的附录，供有兴趣和能力的同学阅读学习.

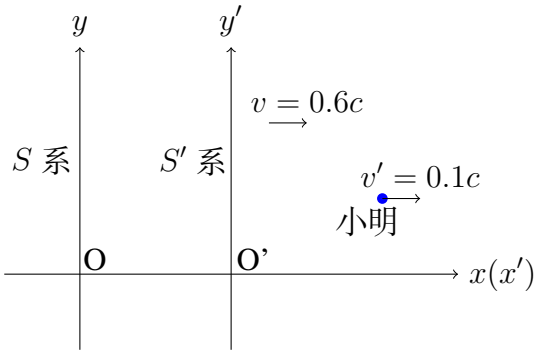
1.3 概念剖析

1.3.1 质点位置的确定方法

参照系

什么是参照系？机械运动是相对运动，没有绝对的运动和静止. 一切机械运动都是相对于另一个预先选定的物体的运动. 这个预先选定的物体及其周围的延拓空间，就是参照系. 参照系可以是一个具体的物体，比如人在跑步的时候，大地（或跑道，或操场，或操场旁边的食堂）就是参照系，因此，描述人跑步速度的严格表述应该是“人相对于大地的速度是 10km/h，方向正北”.

参照系也可以是一个抽象的空间，这种定义参照系的方式在狭义相对论的学习中经常会用到，例如：定义大地参照系为 S 系，定义相对大地向正东方向，以 0.6 倍光速运动的参照系为 S' 系，小明相对 S' 系沿正东方向以 0.1 倍光速运动.



在实际的物理问题中，参照系的选择是十分重要的，这往往决定了能否顺利解出一些复杂题目，同学们在高中物理的学习中应该也能够体会到这一点.

1.3.2 坐标系

有了参照系是不够的，为了定量描述物体在参照系中的运动，我们需要在设定的参照系中建立一个坐标系. 下面是一些坐标系的简介和他们的一些应用场景示例：

直角坐标系

直角坐标系，根据维数的不同，分为数轴、平面直角坐标系、空间直角坐标系. 为体现一般性，以下讨论空间直角坐标系.

空间直角坐标系的单位矢量相互正交，因此在其中对一个矢量进行正交分解是十分容易的，只需向 x、y、z 三个坐标轴方向投影即可.

在直角坐标系中分析问题时，倾向于将一个物理量写成分量的形式，而不是直接处理矢量. 例如, 首先，我们给出质点 A 的位置矢量：$\mathbf{r_A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

式中，$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 分别为 x、y、z 方向的单位向量，其大小为一，方向指向对应坐标轴的正方向. 此后，我们无论是想求 A 的速度还是加速度，都只需对其对应分量进行求导运算，就可以得到对应分量的速度或加速度. 这就是在直角坐标系中解决问题的一般方法.

极坐标系和球坐标系

在涉及旋转的问题中，极坐标系具有独特的优越性. 但相比与直角坐标系，极坐标系中的两个单位矢量 $\hat{r}$ 和 $\hat{\phi}$ 的方向会随时间变化，因此在极坐标系中的速度和加速度公式都更为复杂，具体计算见 1.3.3 节，详情见附录.

在一些三维有心力的情形下，尤其是在电动力学中，常使用球坐标系来分析问题. 但在大物范围内，球坐标系实在是不常见，因此我们将在附录中做简要介绍.

自然坐标系

自然坐标系是一种特殊的坐标系. 与其说它是一种坐标系，它更是一种分析曲线运动的方法，因为它简化了速度和加速度的表达.

平面自然坐标系由两个相互垂直的单位矢量组成，分别是**切向单位矢量** $\hat{e_n}$ 和**法向单位矢量** $\hat{e_n}$. 这两个单位矢量分别沿着质点运动轨迹的切线方向和法线方向.

1. 自然坐标系中的速度
   在自然坐标系中，速度 $\vec{v}$ 定义为物体位置相对于弧长 s 的变化率，即：$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau$
   该公式具体的证明见大物教材 P27. 这里，t 是时间，s 是物体沿曲线轨迹的弧长. 这个定义直接反映了物体沿其运动路径的速度大小.
   注意：在自然坐标系中，**速度只有切向分量，没有法向分量**. 我们可以用一个简单的情形来理解：一列火车行走在轨道上，只有延轨道方向的速度，而没有垂直于轨道的速度.
2. 自然坐标系中的加速度
   自然坐标系中加速度的计算涉及到对矢量的求导，这部分内容将在 1.3.3 节中讲解，加速度的具体表达式则在 1.3.4 节中呈现.
3. 自然坐标系与直角坐标、极坐标的对比
   为便于读者深刻理解三种坐标系，我们列出了一个表格：

特性	直角坐标系	极坐标系	平面自然坐标系
基矢	$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$	$\hat{r},\hat{\theta}$	$\hat{e}_\tau,\hat{e}_n$
基矢对时间的导数	常量，不随时间变化	$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{r}$（证明见 1.3.3）	$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\hat{e}_n$ $\frac{\mathrm{d}\hat{e}_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{\rho}\hat{e}_\tau$ （证明见 1.3.3）
定义	使用三个互相垂直的坐标轴：x、y、z 轴	使用一个极点和一个极轴，点的位置由径向距离 r 和角度 θ 确定	沿着物体的运动轨迹定义，通常由弧长 s 确定
应用	广泛应用于大部分运动学问题	常用于描述圆形或径向对称的运动	特别适用于描述沿平面曲线运动的质点
速度	延坐标轴分解为三个分量	径向速度 r 和角向速度 $r\dot{\theta}$	速度只有切向分量
加速度	延坐标轴分解为三个分量	共有 4 项，比较繁琐（详见附录）	可以分解为切向加速度 $\frac{v^2}{\rho}$ 和法向加速度
优点	直观、易于理解和计算	在处理圆形或径向对称问题时，方程可以大大简化	在处理曲线运动时，方程更加简洁，特别是在分析物体沿曲线的运动时
缺点	在描述曲线运动时，运动方程可能变得复杂	加速度表达式过于繁琐，涉及加速度的计算慎用极坐标系	在描述非曲线运动时，不如直角坐标系直观

表 1.1: 坐标系特性对比

这个表格总结了三种坐标系的主要区别，包括它们的定义、应用、优缺点以及如何处理速度、加速度. 同时，它还展示了坐标系中基矢对时间的导数，可以看出，直角坐标系的基矢是恒定的，不随时间变化，而另外两种坐标系的基矢都不是常矢量.

4. 自然坐标系在解决一些运动学题目时非常便捷. 下面给出两例，读者可以在这两个例子中体会自然坐标系是如何应用在运动学中的.

例题 1.1 一小船 A 从原点出发，以匀速 v_0 沿 y 轴正向行驶. 同时，另一小船 B 从 x 轴上的点 $(x_0,0)(x_0<0)$ 出发，朝 A 追去，其速度方向始终指向 A，速度大小为常数 v_1 . 问：船 B 需要多少时间才能追上 A.

解

这个问题，第一眼看过去是一个直角坐标系的问题，那么我们就先在直角坐标中列列方程，看看会发生什么，设 θ 是 v_1 与 x 轴的夹角：

追及过程，y 方向位移相等：

$$\int_0^t v_1 \sin\theta \,\mathrm{d}t = v_0 t \tag{1}$$

追及过程，x 方向位移相等：

$$\int_0^t v_1 \cos\theta \,\mathrm{d}t = |x_0| \tag{2}$$

然后我们发现，这俩方程我们好像不会解 QAQ

那我们就不解了，试试在 B 的自然坐标系中分析一下.

考虑两船的连线方向，有：

$$\int_0^t (v_1 - v_0 \sin\theta)\ \mathrm{d}t = |x_0|$$

把它拆开：

$$\int_0^t v_1 \,\mathrm{d}t - \int_0^t v_0 \sin\theta \,\mathrm{d}t = |x_0|$$

发现了吗，(3) 式的第一项可以积出来，第二项和 (1) 式很像，可以把 (1) 式代入 (3) 式子：

$$v_1 t - \frac{v_0^2}{v_1} t = |x_0|$$

化简得到：

$$t = \frac{v_1}{v_1^2 - v_0^2}|x_0|$$

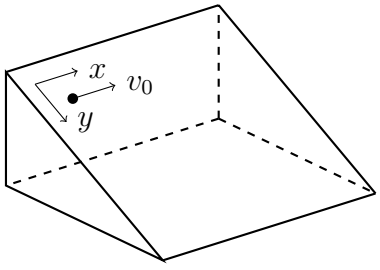
在这个例子中，我们先在直角坐标系中分析问题，然后使用自然坐标系的思想，沿着运动连线方向列出方程，巧妙地解决了这个棘手的问题.

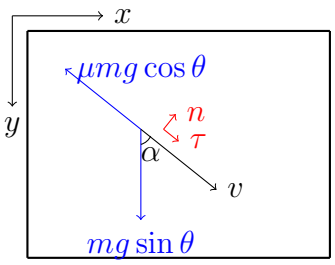
其实，本题在直角坐标系下也可以求解，但是需要解一个十分复杂的微分方程组，有兴趣的读者不妨自己试试.

例题 1.2 **一木块在一固定斜面上滑落，初速度大小为 v_0，方向平行于斜面与地面的交线（即垂直于斜面的侧面），同时，初始时刻受到 y 方向上的微扰. 已知斜面倾角 θ 与木块和斜面间的摩擦因数 μ 满足：$\tan\theta = \mu$，求小木块最终做匀速直线运动时的速度 v'.**

解

本题思路和例 1 类似，我们先在直角坐标系中进行受力分析，分析结果如图所示：





俯视图

据此，在各个方向写出运动学方程：

x 方向：

$$-\mu mg\cos\theta\sin\alpha = ma_x \tag{1}$$

y 方向：

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta\cos\alpha = ma_y \tag{2}$$

代入 μ：

$$mg\sin\theta(1-\cos\alpha) = ma_y \tag{3}$$

然后，我们再在自然坐标系中分析，首先列出切线方向的方程：

$$-\mu mg\cos\theta + mg\sin\theta\cos\alpha = ma_\tau$$

代入 μ：

$$-mg\sin\theta(1-\cos\alpha) = ma_\tau \tag{4}$$

将（3）代入（4）中，可以得到：

$$a_y = -a_\tau \tag{5}$$

可以想到，最终稳定的匀速运动应该是延 y 方向的运动，由运动学关系，有：

$$v' = \int_0^\infty a_y\,\mathrm{d}t = v_0 + \int_0^\infty a_\tau\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

等式左边是 y 方向的运动方程，等式右边是切线方向的运动方程，匀速运动时，切线方向就是 y 方向. 积分上限取为 ∞ 是为了保证木块进入匀速直线运动阶段.

将（5）代入（6）中得到：

$$v' = v_0 - v'$$

解得：

$$v' = \frac{1}{2}v_0$$

可见，匀速运动时的速度只与初速度有关，与倾角、摩擦因数等无关.

1.3.3 运动学中的基础物理量

矢量和标量

在往年的大物考试中，在运动学中出现最多的考点就是对于各种运动学量矢量性和标量性的考察. 下面笔者罗列出了常用的运动学物理量的概念，希望能够加深读者对概念的理解.

以下是一个关于运动学中各种运动学矢量和标量的定义表格：

名称	定义	单位	矢量/标量	典型示例
位移	从初始位置到末位置的有向线段，表示位置的变化.	米 (m)	矢量	绕操场跑一圈，位移为零
路程	物体运动轨迹的长度，不考虑运动方向.	米 (m)	标量	在操场跑一圈，路程为 400 米
平均速度	位移与时间间隔的比值，表示物体在一段时间内的平均快慢.	米/秒 (m/s)	矢量	绕操场跑一圈，平均速度为零
瞬时速度	物体在某一时刻或某一位置的速度，是位移对时间的导数.	米/秒 (m/s)	矢量	汽车在某一时刻的速度表读数.
瞬时加速度	速度对时间的导数，表示物体在某一时刻的速度变化率.	米/秒 ^{2} (m/s^2)	矢量	牛顿第二定律中的 a 就是它
切向加速度	加速度在切线方向的分量，表示速度大小的变化率.	米/秒 ^{2} (m/s^2)	矢量	火车边转弯边加速，摩擦力提供切向加速度.
法向加速度	加速度在法线方向的分量，表示速度方向的变化率.	米/秒 ^{2} (m/s^2)	矢量	火车倾斜转弯时，支持力和一部分重力提供 a_n
时间	运动过程所经历的时间间隔.	秒 (s)	标量	汽车从 A 点到 B 点所用的时间.

表 1.2: 物理量及其定义

以上这张表格列出了运动学中最重要的几个物理量，请读者务必将它们区分清楚.

求导那些事

在上一节的表格中，频繁出现了对某一物理量求导的操作，因此如何正确处理这些求导运算便成为了重中之重.

对于标量的求导，读者自行使用相关高等数学知识即可. 笔者在这里想要着重介绍的是如何处理一个矢量的求导.

众所周知，矢量是有大小、有方向的物理量，因此我们在书写矢量时，常常把它写成**矢**

量 = 矢量的大小 · 表示矢量方向的单位向量（基矢）的形式，例如，我们在极坐标系中定义 A 的位矢为 $\vec{r}$:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

上式中的 $\hat{r}$，就是 $\vec{r}$ 的基矢，它的大小为 1，指向 $\hat{r}$ 的方向，是 $\vec{r}$ 的组成部分.

在高中阶段常用的直角坐标系中，三个基矢 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 都是不随时间变化的常矢量，求导时认为是一个常数，表达式的求导结果只与物理量的标量部分有关. 因此之前在物理问题中，我们很少特别关注一个被求导的物理量的矢量性.

但在自然坐标系和极坐标系中，虽然基矢大小不变，但其方向可以随时间变化. 因此基矢是时间的函数. 此时再对 $\vec{r}$ 进行求导运算时，我们就不能忽略基矢的存在了，因为基矢也是时间的函数，求导时需要应用函数乘法的求导运算法则.

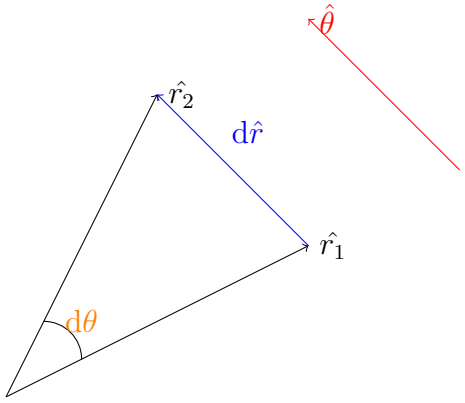
根据上面的论述，要想在极坐标系和自然坐标系中计算一个矢量，就必然涉及到对基矢的求导. 接下来，我们将分别计算极坐标系和自然坐标系中基矢对时间的导数.

1. 极坐标系中的基矢对时间的导数

基矢量 $\hat{r}$ 对时间的导数可以表示为:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

其中，容易看出，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 是角速度，现在用图像法来计算 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}$:



从图中可以发现，当 $\mathrm{d}\theta$ 趋于零时，$\mathrm{d}\hat{r}$ 与 $\hat{r}$ 垂直，因此 $\mathrm{d}\hat{r}$ 与 $\hat{\theta}$ 方向相同.

由于基矢的特性:

$$|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1 \tag{1}$$

因此有:

$$|\hat{r}| \cdot \mathrm{d}\theta = |\mathrm{d}\hat{r}| \tag{2}$$

将 (1) 代入 (2):

$$\frac{|\mathrm{d}\hat{r}|}{\mathrm{d}\theta} = |\hat{\theta}|$$

结合 $\mathrm{d}\hat{r}$ 与 $\hat{\theta}$ 的方向相同:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \hat{\theta}$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \omega\hat{\theta}$$

读者可以用图像法类似地证明，基矢量 $\hat{\theta}$ 对时间的导数可以表示为：

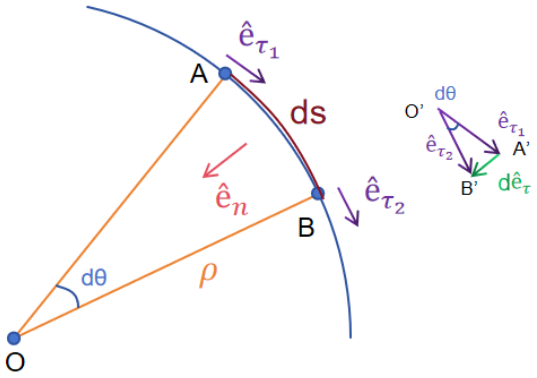
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega\hat{r}$$

2. 平面自然坐标系中的基矢对时间的导数

基矢 $\hat{e}_\tau$ 对时间的导数可以表示为：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

容易发现，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 是速度大小，现在根据图像法计算 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}s}$：



从图中可以发现，当 $\mathrm{d}\theta$ 趋于零时，$\mathrm{d}\hat{e}_\tau$ 与 $\hat{e}_\tau$ 垂直，因此 $\mathrm{d}\hat{e}_\tau$ 与 $\hat{e}_n$ 方向相同. 并且，根据曲率半径的定义（详见 1.3.4），图中的 ρ 就是轨迹在此处的曲率半径.

从 $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ 可以得到：

$$\frac{|\mathrm{d}\hat{e}_\tau|}{|\hat{e}_\tau|} = \frac{\mathrm{d}s}{\rho}$$

由基矢的长度特点：

$$|\hat{e}_n| = |\hat{e}_\tau| = 1$$

这样就得到：

$$\frac{|\mathrm{d}\hat{e}_\tau|}{\mathrm{d}s} = \frac{|\hat{e}_n|}{\rho}$$

又因为 $\mathrm{d}\hat{e}_\tau$ 与 $\hat{e}_n$ 方向相同：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{e}_n}{\rho} \tag{2}$$

将 (2) 代入 (1)，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho}\hat{e}_n$$

类似地，基矢量 $\hat{e}_n$ 对时间的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{e}_n}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{\rho}\hat{e}_\tau$$

结论

在极坐标系中，基矢量 $\hat{r}$ 和 $\hat{\theta}$ 对时间的导数分别为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\omega\hat{\theta},\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\omega\hat{r}}$$

在平面自然坐标系中，基矢量 $\hat{e}_\tau$ 和 $\hat{e}_n$ 对时间的导数分别为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\hat{e}_n,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{e}_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{\rho}\hat{e}_\tau}$$

矢量求导举例

让我们在极坐标中，尝试对 A 的位矢 $\vec{r}$ 求导，看看会发生什么. 我们使用“前导后不导 + 前不导后导”的乘积法则：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{r})=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

在 1.3.3 中，我们证明了：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\omega\hat{\theta}$$

将这个结果代入到 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 的表达式中，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\omega\hat{\theta}$$

这就是极坐标中，A 的位矢对时间的导数，即速度 $\vec{v}$ 的表达式.

读者如果感兴趣的话，可以用同样的方法，应用乘积法则，再对 $\vec{v}$ 求一次导，得到极坐标中加速度的表达式，推导过程并不复杂，最终表达式如下：

$$\vec{a}=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\omega^2\right)\hat{r}+\left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega+r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta}$$

式中各项的实际含义将在知识延伸中展开讲解.

1.3.4 曲线运动

圆周运动的加速度

我们首先从最经典的曲线运动——圆周运动开始研究.

为方便与大物教材上的叙述同步，我们在自然坐标系中研究圆周运动.

正如在 1.3.2 节中说的那样，我们将圆周运动的加速度延切线和法线方向（速度方向和垂直于速度的方向）进行分解，得到加速度的两个分量：切向加速度 $\vec{a}_\tau$ 和法相加速度 $\vec{a}_n$. 我们将从代数和几何两个角度，去计算 $\vec{a}_\tau$ 和 $\vec{a}_n$ 的值.

我们构造一个情景，让质点 A 绕圆心 O 作半径为 R 的圆周运动，进行理论推导：

质点的速度 $\vec{v}$ 可以表示为：

$$\vec{v}=v\hat{e}_\tau$$

其中 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 是质点的切向速度，$\hat{e}_\tau$ 是切向单位向量.

质点的加速度 $\vec{a}$ 是速度对时间的导数：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\hat{e}_\tau)$$

使用 1.3.3 节中提到的乘积法则，我们得到：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau+v\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$$

使用 1.3.3 中的公式可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{R}\hat{e}_n$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$ 代入加速度的表达式中，得到：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau+v\left(\frac{v}{R}\hat{e}_n\right)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau+\frac{v^2}{R}\hat{e}_n$$

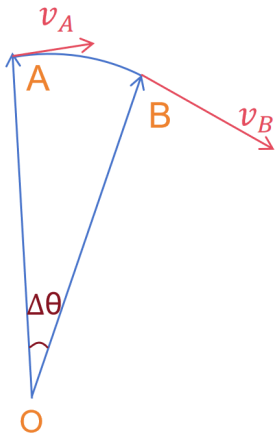
这表明加速度可以分解为两个部分：

- 切向加速度 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
- 法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$

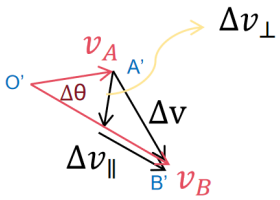
至此，我们得到了，圆周运动的加速度为：

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau+\frac{v^2}{R}\hat{e}_n}$$

下面，我们从几何的角度，直观的给出上述公式的推导:



图一



图二

图一代表质点从 A 点运动到 B 点的过程中的几何关系，图二代表 A 点、B 点的速度矢量和这一过程的速度变化量构成的图像. 注意到:

$$\triangle AOB\sim\triangle A'O'B'$$

因此，由三角形相似得到:

$$\frac{\Delta v_\perp}{v_A} = \frac{AB}{R}$$

当时间间隔趋向于零时，弦长与弧长相等:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{R} = \frac{\widehat{AB}}{R}$$

因此:

$$\frac{\Delta v_\perp}{v_A} = \frac{v_A \Delta t}{R}$$

移项得:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\perp}{\Delta t} = \frac{v_A^2}{R}$$

这样，我们就得到了向心加速度的表达式.

切向加速度则更为简单:

当变化角度无限小时:

$$\lim_{\Delta \theta \to 0} \Delta v_\parallel = \Delta v$$

根据切线加速度的定义:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\parallel}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t}$$

需要指出，图中的 v_A 与 v_B 实际上十分接近的，在 $\Delta t \to 0$ 的条件下，$\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t}$ 没有区别，在理解推导过程的时候注意体会极限的思想.

一般曲线运动的加速度

一般的曲线运动，可以**分割成无穷个无限小的圆周运动的叠加**. 因此，一般曲线运动的加速度公式，与圆周运动的加速度公式，区别仅在将圆周运动半径 R 替换为了某点的曲率半径 ρ. 即:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n}$$

其中:

- $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 是切向加速度，表示速度大小的变化率;
- $\dfrac{v^2}{\rho}$ 是法向加速度，表示速度方向的变化率，与曲率半径 ρ 成反比.

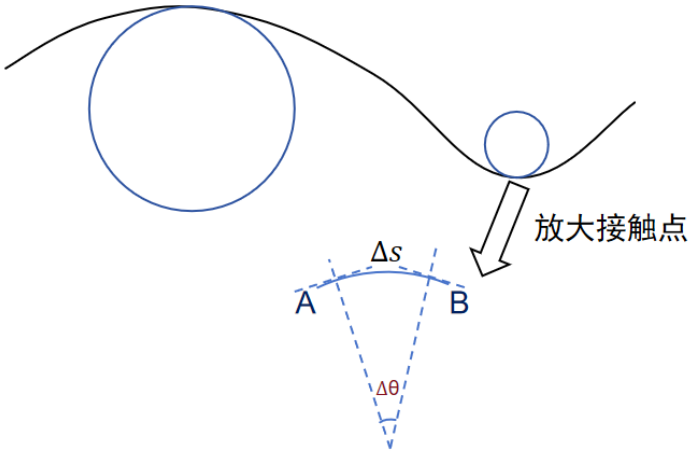
对于公式中出现的曲率半径，我们将在下一节详细研究.

曲率半径的几何意义

曲率半径可以理解为: 在曲线的某一点处，与该点处曲线最接近的圆的半径. 这个圆称为曲线在该点处的曲率圆，曲率圆的半径就是曲率半径. 不难发现，曲率半径越大，曲线在该点

处的弯曲程度越小；曲率半径越小，曲线在该点处的弯曲程度越大；直线的曲率半径是无穷大.

在几何上，找出曲率圆、计算曲率半径可以采用这样的方法：



1. 在一段曲线上找到 A、B 两个点，过这两个点作它们的切线.
2. 分别作两条切线的垂线，两条垂线会交于一点，记作 O.
3. 慢慢靠近 A、B 两点，当两点无限接近，$\Delta\theta \to 0$ 时，O 的位置就是曲率圆圆心的位置，曲率半径可以用几何关系 $\rho = \dfrac{\Delta s}{\Delta\theta}$ 来计算. 式中，Δs 是 A、B 两点间曲线的长度.

需要指出，除个别题目外，**几乎不会使用上述方法来计算曲率半径**. 这里为了读者加深对曲率半径的理解，列出了这个方法.

曲率半径的计算方法

计算曲率半径的物理方法是，利用公式 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，变形得到：

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

下面展示计算 A 点曲率半径的一般步骤：

1. 计算 A 点的速度，包括大小、方向.
2. 计算 A 点加速度的大小和方向，并将其投影到**垂直于速度的方向**，得到 a_n.
3. 如果难以得到 A 点的加速度，考虑直接计算 a_n.
4. 利用公式 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$ 计算曲率半径.

在计算过程中，需要注意几点：

5. 如果题目中给出了具体的运动形式，按照上面的一般步骤计算即可；如果只给出了曲线的方程，就需要我们自己构造一个简单的运动形式. 如，要想计算抛物线的曲率半径，我们可以构造一个抛体运动.
6. 一定要找对速度的方向，如果运动由多个分运动合成，注意考虑将所有分运动合成为物体的真实运动.

7. 与速度不同，在计算曲率半径时，往往不必求出完整的加速度，考虑垂直于速度方向的加速度即可，因为这就是 a_n 的大小.

事实上，计算曲率半径有一种更为暴力的方法——数学公式法. 对于平面曲线 $y=f(x)$，ρ 的计算公式为：

$$\rho=\frac{\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}$$

对于参数方程 $x=x(t)$、$y=y(t)$，曲率半径的公式为：

$$\rho=\frac{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|}$$

上述两个公式都可以通过构造一般的物理运动来证明，总体过程与计算曲率半径的一般过程无异，感兴趣的读者可以尝试对上述公式运用物理法来证明.

曲率半径计算题

例题 1.3 求斜抛运动的轨迹在抛出后任意时刻的曲率半径，并分别写出在抛射点和最高点的曲率半径. 条件：抛射点在原点，初速度 v_0，抛射角（与 x 轴夹角）为 θ.

解

斜抛运动中，物体的轨迹曲率半径可以通过重力的法向分量来理解. 重力的法向分量提供了向心加速度，从而决定了轨迹的弯曲程度.

1. 速度的分解

   在任意时刻，物体的速度可以分解为水平分量和竖直分量：

   - 水平分量：$v_x=v_0\cos\theta$（恒定不变）
   - 竖直分量：$v_y=v_0\sin\theta-gt$（随时间变化）

   总速度为：

   $$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}$$

2. 重力的法向分量

   重力 g 始终竖直向下，其法向分量 $g\sin\alpha$ 提供向心加速度. 其中，α 是重力方向与速度方向的夹角.

   夹角 α 的正弦值为：

   $$\sin\alpha=\frac{v_x}{v}=\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}}$$

3. 曲率半径的物理表达

   根据向心加速度公式 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，其中 $a_n=g\sin\alpha$，可以得到曲率半径 ρ：

   $$\rho=\frac{v^2}{g\sin\alpha}$$

代入 v 和 $\sin\alpha$：

$$\rho = \frac{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}{g\cdot\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2+(v_0\sin\theta-gt)^2}}}$$

化简：

$$\rho = \frac{[(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2]^{3/2}}{g|v_0\cos\theta|}$$

分别代入 $t=0$ 和 $t=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$，就可以算出在抛射点（落地点）和最高点的曲率半径：

$$\rho_{\text{抛射点}} = \frac{v_0^2}{g\cos\theta}$$

$$\rho_{\text{最高点}} = \frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$$

结论

1. 曲率半径 ρ 由重力的法向分量 $g\sin\alpha$ 决定. 当 $v_y=0$（即物体到达最高点时），$\sin\alpha=1$，此时曲率半径最小，轨迹弯曲最厉害.
2. 曲率半径反映了轨迹的弯曲程度. 在最高点附近，轨迹弯曲最明显；而在抛出点和落地点附近，轨迹接近直线，曲率半径最大.

例题 1.4 计算一个半径为 R, 螺距为 H 的等距螺旋线（可以理解为一个螺纹）在任意一点的曲率半径.

解

等距螺旋线的曲率半径 ρ 可以通过物理方法来计算. 等距螺旋线可以看作是一个物体在圆周运动的同时，沿着轴线方向以恒定速度运动的轨迹.

1. 速度的分解
   - 圆周运动的速度分量：$v_{\text{圆周}} = \omega R$，其中 ω 是角速度.
   - 轴线运动的速度分量：$v_{\text{轴线}} = \dfrac{H}{T}$，其中 T 是完成一个圆周运动的周期.
   - 总速度 v:

$$v = \sqrt{v_{\text{圆周}}^2 + v_{\text{轴线}}^2} = \sqrt{(\omega R)^2 + \left(\frac{H}{T}\right)^2}$$

周期 T 与角速度 ω 存在以下关系：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

因此，速度可简化为：

$$v = \sqrt{(\omega R)^2 + \left(\frac{H\omega}{2\pi}\right)^2} = \omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}$$

2. 计算向心加速度 a_n

通过水平方向的圆周运动，我们可以得到质点圆周运动的向心加速度：

$$a_n = \omega^2 R$$

注意到，这一加速度是垂直于速度的，且在这一方向上的加速度只有向心加速度，因此

这是我们计算曲率半径所需要的 a_n：

3. 计算曲率半径 ρ

根据向心加速度公式 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，可以得到曲率半径 ρ：

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\right)^2}{\omega^2 R} = \frac{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}{R}$$

化简得：

$$\boxed{\rho = R + \frac{H^2}{4\pi^2 R}}$$

经过以上运算，我们通过物理方法，利用向心加速度的公式，得到了等距螺旋线的曲率半径. 这个曲率半径反映了螺旋线的弯曲程度，由圆周运动的半径 R 和轴线运动的螺距 H 共同决定.

1.3.5 运动方程的应用

运动方程问题，本质上说都是解微分方程的问题. 和纯粹的高数题不同的是，运动学中的题目，往往需要自己设出一些物理量，找到质点的运动方程，然后再进行求解.

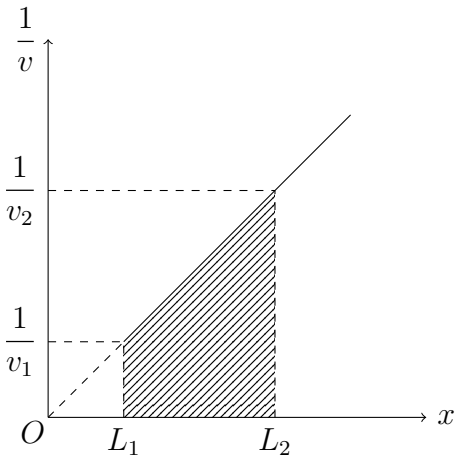
例题 1.5 蚂蚁离开巢穴沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心的距离成反比，当蚂蚁爬到距巢中心 $L_1 = 1$ m 的 A 点处时，速度 $v_1 = 2$ cm/s，试问：蚂蚁继续由 A 点爬到距巢中心 $L_2 = 2$ m 的 B 点需要多长时间？

解

解法 **1**：图像法

由 $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{x}{L_1}$ 作出 $\dfrac{1}{v} - x$ 图像，因为 $\Delta t_1 = \dfrac{\Delta x}{v_1}$，所以所围斜线部分的面积的值就是时间的值，则有

$$T = \frac{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)(L_2 - L_1)}{2} = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75\ \text{s}$$



解法 **2**：微分方程法

以蚁巢中心为坐标原点 O，爬行方向 OA 为 x 轴正方向建立坐标系. 设蚂蚁在坐标 x 处的速度为 v，根据题意，有 $v=\dfrac{L_1v_1}{x}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L_1v_1}{x}$，$x\mathrm{d}x=L_1v_1\mathrm{d}t$. 等式两边积分

$$\int_{L_1}^{L_2}x\mathrm{d}x=\int_0^T L_1v_1\mathrm{d}t$$

即：

$$\frac{L_2^2-L_1^2}{2}=L_1v_1(T-0)$$

代入数据得：

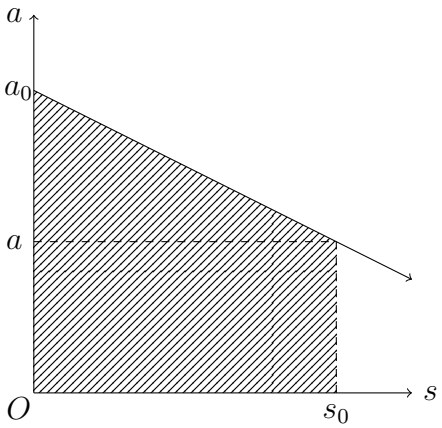
$$T=\frac{L_2^2-L_1^2}{2L_1v_1}=75\ \mathrm{s}$$

例题 1.6 已知一质点做变加速直线运动，初速度为 v_0，其加速度随位移线性减小，即加速过程中加速度与位移之间的关系满足条件 $a=a_0-ks$，式中 a 为任一位置处的加速度，s 为同一位置处时的位移，a_0、k 为常量，求当位移为 s_0 时质点的瞬时速度.

解

解法 **1**：图像法

因 $\Delta v^2=v^2-v_0^2=\displaystyle\int 2a\,\mathrm{d}s=2\int a\,\mathrm{d}s$，故可利用 $a-s$ 图像的面积求出 $(v^2-v_0^2)$. 建立 $a-s$ 图如下图所示，图中阴影部分面积的两倍就表示 $(v^2-v_0^2)$.



因此有：

$$v^2-v_0^2=2\times\frac{a_0+(a_0-ks_0)}{2}\cdot s_0=2a_0s_0-ks_0^2,$$

得：

$$v=\sqrt{v_0^2+2a_0s_0-ks_0^2}.$$

解法 **2**：微分方程法

给定加速度 a 与位移 s 之间的关系为：$a=a_0-ks$，其中 a_0 和 k 是常数.

因为 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$，根据链式法则，我们有：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=a_0-ks$$

这是一个可分离变量的微分方程. 我们可以分离变量并积分：

$$\int v\,\mathrm{d}v = \int (a_0 - ks)\,\mathrm{d}s$$

积分后得到：

$$\frac{v^2}{2} = a_0 s - \frac{ks^2}{2} + C$$

其中 C 是积分常数. 为了找到 C，我们使用初始条件：当 $s = 0$ 时，$v = v_0$. 将这些值代入上面的方程，得到：

$$\frac{v_0^2}{2} = C$$

因此，方程变为：

$$\frac{v^2}{2} = a_0 s - \frac{ks^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}$$

化简得，当位移为 s_0 时，质点的瞬时速度为：

$$v = \sqrt{2a_0 s_0 - ks_0^2 + v_0^2}$$

结论

从上面的两个例子可以看出，对于运动方程的相关题目，图像法往往是更为简单的做法. 但有时，我们很难找到合适的图像来处理运动学问题，因此我们需要学会利用微分方程处理运动学问题. 在处理问题时，我们需要先根据题目条件，列出运动学关系式，然后利用位移、速度和加速度的微分关系转化为微分方程问题，运用高等数学的技巧解决问题.

下列习题均为往年大学物理学真题或变种，读者可以作为参考.

1.4 真题练习

练习 1.1 一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 5t^2 - 3t^3$，其中 t 以 s 为单位，当 $t = 2s$ 时，该质点正在 (　).

A. 加速

B. 减速

C. 匀速

D. 不能确定

解 **A**

将 x 对 t 求二阶导，得到：$a = 10 - 18t$

代入 $t = 2s$，得到 $a = -26m/s^2$.

又因为此时速度也为负数，所以加速.

练习 1.2 一质点沿 x 轴方向运动，其运动方程为 $x = 10 - 9t + 6t^2 - t^3$ (SI)，则 t 时刻，质点的速度 $v =$ _____，加速度 $a =$ _____.

解 $v = -9 + 12t - 3t^2$，$a = 12 - 6t$.

求导两次即可.

练习 1.3 一质点沿半径为 1m 的圆轨道运动，已知运动学方程为 $\theta = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$ (SI)，则 $t = 1s$ 时该质点的速度大小为 _____ m/s，加速度的大小为 _____ m/s².

解 1　$\sqrt{2}$

因为 $v = \omega r$，将所给出的 θ 的表达式对时间求导得到：$\omega = t$，代入 $t = 1s, r = 1m$，得到 v.

加速度分为切向加速度和法向加速度，$a_n = \omega^2 r$，$a_\tau = \beta r$，将 ω 的式子对时间求导得到 $\beta = 1$. 代入所有数据可以计算得到 a.

练习 1.4 一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为 $\vec{v}$，瞬时速率为 v，某一时间内的平均速度为 $\bar{\vec{v}}$，平均速率为 $\bar{v}$，它们之间的关系必定有（　）.

A. $|\vec{v}| = v$，$|\bar{\vec{v}}| = \bar{v}$

B. $|\vec{v}| \neq v$，$|\bar{\vec{v}}| = \bar{v}$

C. $|\vec{v}| \neq v$，$|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$

D. $|\vec{v}| = v$，$|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$

解 **D**

矢量 $\vec{v}$ 的模长是 v，所以 $|\vec{v}| = v$.

平均速度通过位移对时间平均计算得到，平均速率通过路程对时间平均计算得到，而位移大小不等于路程.

练习 1.5 某物体沿 x 轴作直线运动，加速度 a 与时间 t 以及速度 v 的关系式为 $a = -kv^2t$，式中 k 为大于零的常量. 已知物体的初速度为 v_0，则速度 v 与时间 t 的函数关系为：（　）.

A. $v = -\frac{1}{2}kt^2$

B. $v = \left(-\frac{1}{2}kt^2\right)^{-1}$

C. $v = \left(\frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}\right)^{-1}$

D. $v = \frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}$

解 **C**

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2t$，分离变量积分，并代入初始值，可以得到答案.

练习 1.6 质点沿半径为 R 的圆周按下列规律运动，路程 (弧长) $s = bt - \frac{1}{2}ct^2$，式中 b、c 为正的常量，且 $\frac{b^2}{c} < R$. 则在切向加速度与法向加速度数值达到相等以前所经历的时间为：

A. $\frac{b}{c} + \sqrt{\frac{R}{c}}$

B. $\frac{b}{c} - \sqrt{cR}$

C. $\frac{b}{c}-cR^2$

D. $\frac{b}{c}+cR^2$

解 **A**

法向加速度：$a_n=\frac{v^2}{R}$

切向加速度：$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

将 s 对时间求导得：$v=b-ct$

将 v 对时间求导得：$a_\tau=-c$

令 $a_n=a_\tau$，解得时间 t

✍ **练习 1.7** 一运动质点在某瞬时矢径为 $\vec{r}(x,y)$，其速度的大小为 _____.

解 $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$

✍ **练习 1.8** 质点沿 x 轴运动，其加速度与位置坐标的关系为 $a=3+6x^2$ (SI)，如果质点在原点处的速度为零，试求：其在任意位置处的速度.

解 $v=\sqrt{6x+4x^3}$

因为 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，分离变量得到：$v\mathrm{d}v=(3+6x^2)\mathrm{d}x$，将这个式子积分并代入初始值 $(x=0,v=0)$，得到答案.

✍ **练习 1.9** 一质点运动学方程为 $x=t^2,y=(t-1)^2$，其中 x、y 以 m 为单位，t 以 s 为单位.

1. 试写出质点的轨迹方程；
2. 质点的速度大小何时取极小值?
3. 试求当速度大小等于 $10m/s$ 时，质点的位置坐标；
4. 试求时刻 t 质点的切向和法向加速度的大小.

解

1. $y=(\sqrt{x}-1)^2$
2. $v_x=2t$, $v_y=2(t-1)$

   $v=2\sqrt{2t^2-2t+1}$

   $t=\frac{1}{2}$
3. $v=2\sqrt{2t^2-2t+1}=10$

   $t=4$

   $(x,y)=(16,9)$
4. $a_x=2$,$a_y=2$

   $\cos\theta=\frac{v_x}{v}$, $\sin\theta=\frac{v_y}{v}$

   $a_\tau=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta$, $a_n=-a_x\sin\theta+a_x\cos\theta$

   $a_t=\frac{4t-2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$, $a_n=\frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$

✍ **练习 1.10** 一物体作斜抛运动，测得在轨道 A 点处速度 $\vec{v}$ 的大小为 v，其方向与水平方向夹角成 30°，则物体在 A 点的切向加速度大小 $a_\tau=$ _____，轨道曲率半径 $\rho=$ _____.

解 $\frac{1}{2}g$ $\frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$

$$a_\tau = g\cos 60^\circ$$
$$a_n = g\sin 60^\circ$$
$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

练习 1.11 某给定时刻，质点 P 的位置、速度和加速度矢量在直角坐标系下分别为

$$\vec{r} = 250\vec{i} + 630\vec{j} + 430\vec{k};\quad \vec{v} = 90\vec{i} + 125\vec{j} + 170\vec{k};\quad \vec{a} = 16\vec{i} + 125\vec{j} + 30\vec{k}.$$

求此时刻：

1. 质点轨迹的切向单位矢量 $\vec{\tau}$ (直角坐标系下表示)；
2. 质点的总加速度、切向加速度和法向加速度大小；
3. 轨迹的曲率半径.

解

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 0.39\hat{i} + 0.54\hat{j} + 0.74\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16^2 + 125^2 + 30^2} = 129.54\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|} = 96.62\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 86.29\,\mathrm{m/s^2}$$

$$r = \frac{v^2}{a_n} = 609.86\,\mathrm{m}$$

其余真题，没有类型上的差异. 更多真题详见往年试卷资料.

1.5 内容扩展

1.5.1 极坐标系和球坐标系

极坐标系中的加速度

我们曾在 1.3.3 节中，提到了极坐标系中加速度的表达式：

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right)\hat{r} + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega + r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta}$$

注意到，极坐标中的加速度其实包含了四项，它们各有各的物理含义：

- $\ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 是径向加速度，由径向速度大小的改变引起.
- $r\dot{\theta}^2 = r\omega^2$ 是向心加速度，由于速度方向的改变而产生.
- $r\ddot{\theta} = r\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 是切向加速度，表示切向速度大小随时间的变化率.

- $2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega$ 是科里奥利加速度，由径向速度和角速度共同产生，是一种复合效应

这些分量描述了在极坐标系中运动的质点的完整加速度. 在分析具体问题时，这些分量可以帮助我们更好地理解质点的运动状态.

下面，我们给出一个具体的例子，体会在极坐标系中计算加速度的过程：

例题 1.7 假设一个质点在极坐标系中运动，其径向距离 r 随时间 t 的变化规律为 $r(t) = kt^2$，其中 k 是一个常数. 同时，角度 θ 随时间的变化规律为 $\theta(t) = \omega t$，其中 ω 是一个常数角速度，计算在 t 时刻的加速度向量 $\vec{a}$.

解

首先，我们需要计算径向和切向的速度分量.

径向速度 $\dot{r}$：

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(kt^2) = 2kt$$

切向速度 $r\dot{\theta}$：

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t) = \omega$$

$$r\dot{\theta} = kt^2 \cdot \omega = \omega k t^2$$

接下来，我们计算径向和切向的加速度分量.

加速度径向分量 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$：

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2kt) = 2k$$

$$r\dot{\theta}^2 = (kt^2)(\omega)^2 = k\omega^2 t^2$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2k - k\omega^2 t^2$$

加速度切向分量 $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$：

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega) = 0$$

$$r\ddot{\theta} = 0$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2(2kt)(\omega) = 4k\omega t$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4k\omega t$$

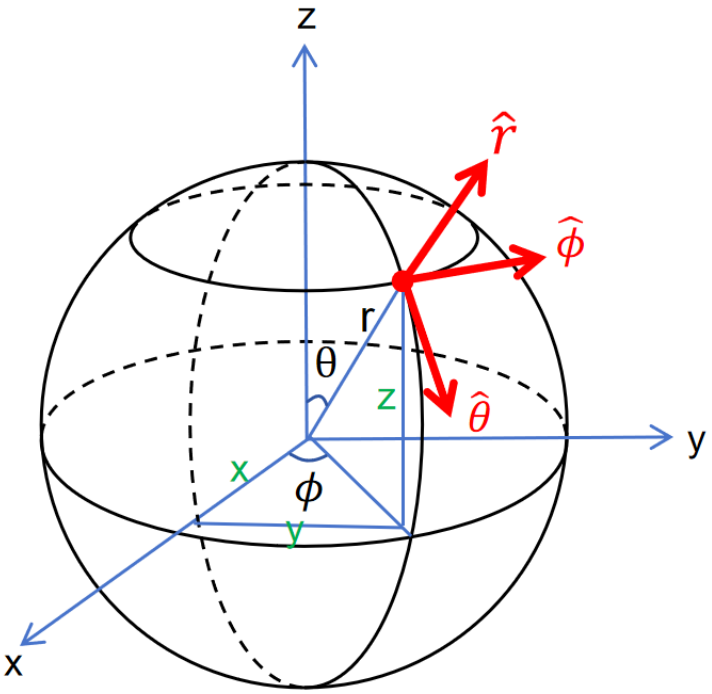
代入公式，得加速度向量 $\vec{a}$ 为：

$$\vec{a} = (2k - k\omega^2 t^2)\hat{r} + (4k\omega t)\hat{\theta}$$

这就是在给定的 t 时刻，质点在极坐标系中的加速度向量.

球坐标系简介

球坐标是一种三维坐标系统，用于描述空间中一个点的位置. 它由三个坐标组成：径向距离 r 、极角 θ 和方位角 ϕ.



定义

- 径向距离 (r)：从原点到点的直线距离.
- 极角 θ：从正 z 轴到点与原点的连线与 z 轴之间的夹角，范围为 $0 \leq \theta \leq \pi$.
- 方位角 ϕ：从正 x 轴到点在 xy 平面上的投影与 x 轴之间的夹角，范围为 $0 \leq \phi < 2\pi$.

坐标转换

球坐标与直角坐标之间的转换关系如下：

球坐标到直角坐标：

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

直角坐标到球坐标：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

体积元

在球坐标系中，体积元 $\mathrm{d}V$ 的表达式为：

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

应用情景

球坐标在描述具有球对称性的问题时非常方便，例如：

- **物理中的电磁场：**在球对称的电荷分布中，球坐标可以简化麦克斯韦方程.
- **量子力学中的原子轨道：**氢原子的波函数在球坐标下具有简洁的形式.
- **有关球体的表面张力问题：**可以有效表示出球面上的面元.

1.5.2 相对运动

这部分内容在大物课本上出现，考试几乎不考. 但相对的思想是物理学中的一种重要思想，因此在这里单独提出.

在学习相对运动时，笔者总结了一句话，即：**绝对运动 = 相对运动 + 牵连运动**

“绝对运动”，一般指物体相对地面的运动，代表了在地面上的人看上去，物体的真实速度；“相对运动”，代表了物体相对于所选参考系的运动，是站在所选参考系里的人观察到的物体的运动. “牵连运动”，代表了参考系相对于地面的运动，表征着参考系本身的运动状态.

举个简单的例子：火车向北以 $80m/s$ 的速度运行，人在火车里以 $1m/s$ 的速度向南步行，那么，在这个例子中，对于人来说，绝对速度为向北的 $79m/s$，相对运动为向南的 $1m/s$，火车的牵连速度为向北的 $80m/s$.

需要注意的是，“绝对 = 相对 + 牵连” 的思想不仅使用于速度变换，也使用于加速度变换；不仅使用于一维运动的叠加，也适用于矢量运动合成；不仅适用于平动参考系，也适用于转动参考系；不仅使用于低速运动，也适用于相对论性运动. 只不过，在不同情形下的公式略有不同罢了，读者可以在日后的学习中注意体会.

关于相对运动详细的信息，建议同学们阅读学习大物课本 P40 P42 页的内容，更详细的内容，推荐阅读《力学（物理类）(舒幼生编著)》中，关于参考系间的相互运动的章节.

1.5.3 习题扩展

例题 1.8

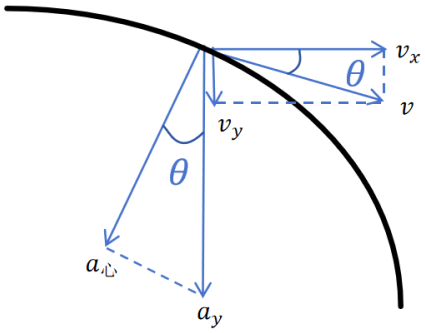
试用质点运动学方法，求解 $y = A\cos x$ 的曲率半径 ρ 随坐标量 x 的分布函数.

解

设一质点沿 $y = A\cos x$ 曲线运动，其分运动为

$$x = v_0 t, \quad y = A\cos v_0 t.$$

在曲线 $\{x, y\}$ 点邻域取一无穷小曲线段，t 时刻位于 $x = v_0 t$，运动图解如下图所示：



因此，有：

$$v_x = v_0, \quad v_y = -v_0 A \sin v_0 t$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -v_0^2 A \cos v_0 t$$

可以求得速度为：

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + A^2 \sin^2 v_0 t v_0} = \sqrt{1 + A^2 \sin^2 x v_0}$$

向心加速度与竖直方向的夹角 θ 为：

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 \sin^2 x}}$$

解得：

$$a_c = |a_y \cos\theta| = \frac{v_0^2 A \cos x}{\sqrt{1 + A^2 \sin^2 x}}$$

需要注意的是，质点实际的加速度是 a_y，沿竖直方向，这里的 a_c 只是加速度沿垂直于速度方向的一个分量.

由此可解得曲率半径：

$$\rho = \frac{v^2}{a_c} = \frac{(1 + A^2 \sin^2 x)^{3/2}}{A \cos x}$$

例题 1.9

A, B, C, D 四个小孩分别站在正方形的四个顶点，以相同的不变速率 v 作追逐游戏，A 追 B, B 追 C, C 追 D, D 追 A, 而且每个小孩始终对准自己追逐的目标运动. 设在追逐过程中某一时刻，正方形的边长为 l，如图所示. 求：

1. 四个小孩再经过多少时间追到自己的目标；
2. 每个小孩自那时刻起跑了多长路程？
3. 每个小孩在那一时刻跑动的加速度多大？

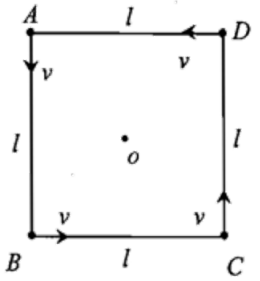


图1

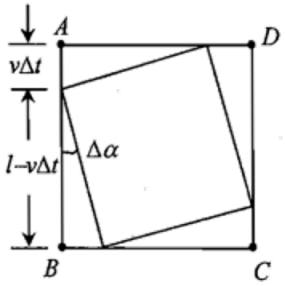
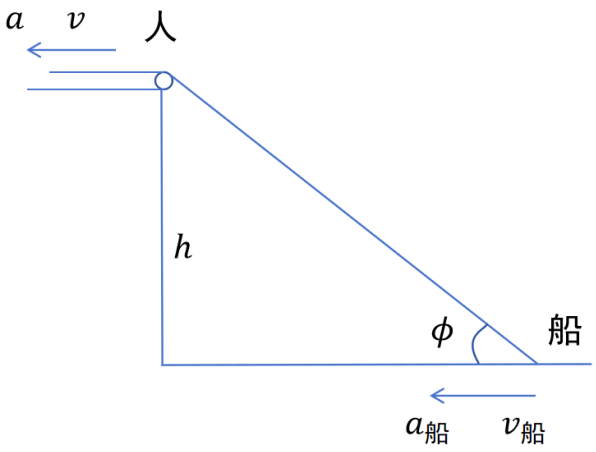


图2

解

1. 因为每个小孩在追逐目标过程中，始终处在某个正方形的各个顶点，只是正方形逐渐变小. 一旦追到各自的目标，三个小孩必相遇，且处在正方形的中心.
   在考察各小孩追逐目标时，容易发现，在依次追逐过程中，追逐速度在指向正方形中心的分速度保持不变，为
   $$v\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$
   因此，自那一时刻起（即正方形边长为 l 时刻），直至追到目标，需时间 t 为
   $$t = \frac{\overline{Ao}}{v\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}l/2}{\sqrt{2}v/2} = \frac{l}{v}$$
2. 因此，每个小孩跑的路程为
   $$S = vt = l$$
3. 易知，每个小孩的运动均为匀速率曲线运动. 切向加速度为零，法向加速度为
   $$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$
   为此应求出曲线轨迹在那一时刻位置的曲率半径 ρ. 根据
   $$\rho = \frac{\Delta S}{\Delta\alpha}$$
   以小孩 A 为例，经无限小的时间间隔 Δt，A 经过无限小路程
   $$\Delta S = v\Delta t$$
   速度方向有一无限小的改变 $\Delta\alpha$，由图 2 所示，有关系
   $$\Delta\alpha = \frac{v\Delta t}{l - v\Delta t} \approx \frac{v}{l}\Delta t$$
   $$\rho = \frac{\Delta S}{\Delta\alpha} = \frac{v\Delta t}{\frac{v}{l}\Delta t/l} = l$$
   小孩在此刻的加速度（即法向加速度）大小为
   $$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{l}$$

例题 1.10 人在岸上用绳拉船，岸高 h，如图所示. 绳与水平水面夹角为锐角 ϕ 时，人左行速度和加速度分别为 v 和 a，试求此时船的左行速度 $v_{船}$ 和 $a_{船}$.

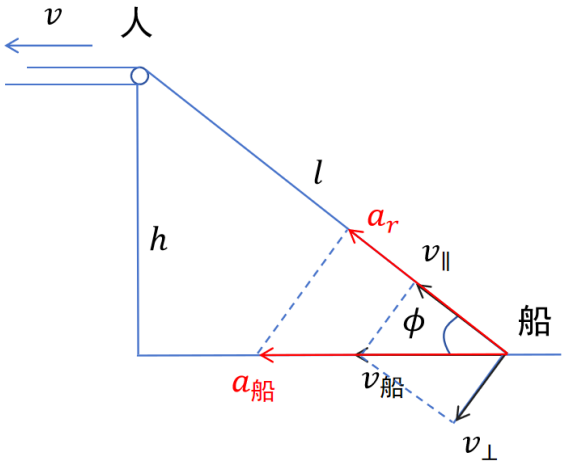


笔记 对于这个情景，在课堂的例题中，我们已经认识到，在直角坐标系下，求解 $a_{船}$ 是十分困难的. 我们在前面提到过，极坐标系下，加速度可以分解为四项，在切向和径向各有两项. 在这个问题中，求解切向的加速度是十分困难的，因为我们很难求得 ϕ 对时间的一阶导数和二阶导数.

好在，我们知道，小船的加速度方向一定是水平向左的（因为小船的运动实际上是一个一维运动），因此，只要我们能求出小船的切向加速度，就相当于求得了加速度的一个分量，这样就能间接求出水平方向的加速度了.

解

参考图解：



因此，有：

$$v_{船}\cos\phi = v_{\parallel} = v \Rightarrow v_{船} = \frac{v}{\cos\phi}.$$

将 ϕ 对应的绳长记为 l，将 $a_{船}$ 沿绳方向的分量记为 a_r，以径向向内为 a_r 的正方向. a_r 由两个贡献量合成：

$$\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad \frac{v^2}{l}.$$

因为：

$$\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a,\quad v_{\perp}=\frac{v_{\parallel}}{\tan\phi}=v\tan\phi,\quad l=\frac{h}{\sin\phi},$$

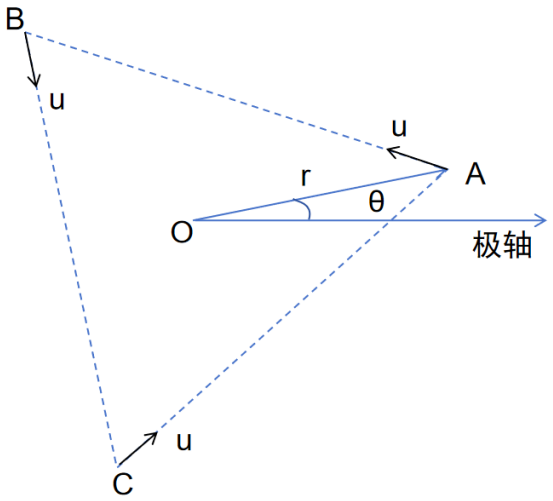
得：

$$a_r=\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t}+\frac{v_{\perp}^2}{l}=a+\frac{v^2}{h}\sin\phi\cdot\tan^2\phi,$$

$$\Rightarrow a_{船}=\frac{a_r}{\cos\phi}=\frac{a}{\cos\phi}+\frac{v^2}{h}\tan^3\phi.$$

有耐心的读者可以尝试在直角坐标系中解决此问题，最终会得到一样的结果.

例题 1.11 平面上有三个动点 A,B,C，$t=0$ 时刻三者连线构成每边长为 l 的等边三角形. 取三角形中心 O 为极坐标系原点，取 $t=0$ 时刻 O 到 A 的连线为极轴. 设 A,B,C 均在此平面内作匀速率运动，速率同为 u，过程中 A 始终朝着 B 运动，B 始终朝着 C 运动，C 始终朝着 A 运动，试求 A 的运动轨道.



笔记 在课内的学习中，我们大多数情况下都是在直角坐标系中求解运动的轨迹方程，其基本方法有两类：一是直接求出 $x(t)$ 和 $y(t)$，然后消去 t；二是列出 x、y 关于 t 的导数，然后消去 dt，求解关于 x、y 的微分方程. 在极坐标中，方法也是类似的. 在本题中，在某一给定的角度和距离时，径向和法向的速度大小和方向都易于确定，因此我们可以通过径向和法向速度的关系，得到关于 r 和 θ 的微分方程，然后解出极坐标下的轨迹方程.

解

如图所示，A 处于 (r,θ) 位置时，有：

$$v_r=-u\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}u,\quad v_\theta=u\sin 30^\circ=\frac{1}{2}u,$$

在极坐标中，有：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_r,\quad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v_\theta,$$

消去 $\mathrm{d}t$，得：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r\frac{v_r}{v_\theta}$$

代入 v_r、v_θ，并分离变量，两边积分：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\sqrt{3}r,\Rightarrow\int_{\frac{l}{\sqrt{3}}}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\int_0^{\theta}d\theta.$$

因此，A 点运动轨道方程为：

$$r=\frac{l}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\theta}$$

第 2 章 牛顿定律

2.1 引言

牛顿定律是经典力学的基石，也是大学物理中**最为基础和重要的内容之一**. 本章将讲解静力学、动力学和动量冲量的相关内容，对应**大物课本的第二章和第四章**. 我们将重点介绍微元法在力学中的应用，帮助同学们理解如何通过微积分的方法解决一般情况下的力学问题. 同时，我们将补充**非惯性系**这一课本中没有，但在实际解题中十分常用的知识. 除此之外，我们补充了一些课本之外、普物难度之内的常用的物理方法和知识. 希望读者通过本章的学习，不仅能够掌握牛顿定律的基本内容，还能有所扩展提升，为理论力学的学习打下坚实的基础.

2.2 考情速递

关于牛顿定律的考情分析如下：

1. 牛顿第一定律对应的静力学分析（受力平衡、力矩平衡）在往年题目中，几乎没有.
2. 牛顿第二定律基本不单独考察，相关题目的难点也主要在于运动学的分析，学习非惯性系后，结合高中知识，牛二的相关考题不会成为障碍.
3. 单纯考动量和冲量的题目十分简单，主要考察动量守恒的基本概念、冲量的计算方法和简单的积分.
4. 考试题目中，动量相关内容经常与刚体和角动量的相关知识相结合. 刚体相关题目，因为高中没有涉及，总体上看要大大高于前四章的题目. 因此请同学们不要轻视动量的学习，为后面角动量的学习打下基础.
5. 变质量的牛顿第二定律基本不考.

2.3 概念剖析

2.3.1 微元法及其在力学中的应用

微元法是一种科学思维方法，其核心思想是“化整为零”，即将研究对象或过程细分为无限多个无穷小的部分（微元），通过对这些微元的分析和处理，再综合起来解决整体问题. 这种方法在物理学中应用广泛，尤其是在力学领域.

在前面的运动学中，多种定义和公式的推导，都对一段过程运用了微元法，如：曲率半径的推导、基矢对时间导数的推导、向心加速度的几何推导等等.

在本章中，我们将把微元法应用到力学题目中，解决一类力学中的常见问题：连续体问题. 下面是应用微元法的一般步骤：

1. **选取微元：**根据对象的对称性，将连续体分解为无数个质量微元，并选取一个合适的自变量. 例如，对于圆环状物体，可以选取对应圆心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的小圆弧为微元，此时自变量是小圆弧的角位置 θ；对于棒状物体，可以选取对应长度为 $\mathrm{d}l$ 的小线段为微元，此时自变量是小线段的位置 x.
2. **分析微元：**对选取的微元进行物理分析，如分析它受到的力、分析由它产生的场等.
3. **求解整体：**通过积分、投影等数学方法，将微元结果累加，得到整体的物理量.

以上三步中，第一步的微元选取是最重要的. 对于一些复杂问题，可以尝试多种选取微元的方式，体会选取不同微元的运算差别.

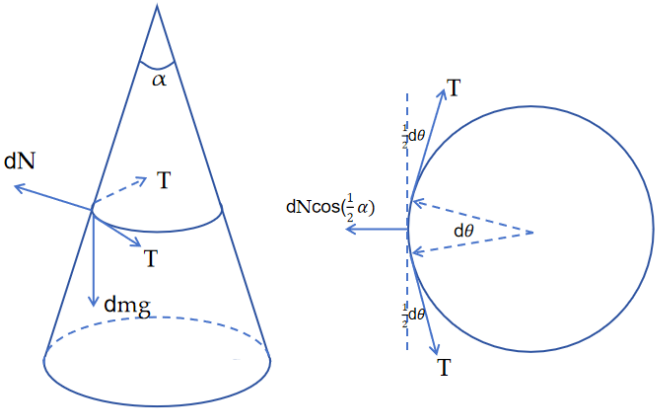
下面是几道微元法具体应用的例题：

例题 2.1 有一个质量为 m 的绳环套在顶角为 α 的圆锥上，求绳上各处的张力.

笔记 本题要求我们求绳子的张力，由对称性可知，绳上张力处处相同，于是我们采用上面提到的方法，选取对应圆心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的小圆弧绳子为微元，自变量是绳元的角位置 θ. 这里要注意各个角度之间的关系和微元法处理时的几何思路.

解

取很小一段圆环，如图所示：



对每个微元，有径向方向的受力平衡，可得：

$$2T\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\right)=\mathrm{d}N\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

由于 $\mathrm{d}\theta$ 是个小角，由近似关系 $\sin\theta\approx\theta$ 得：

$$T\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}N\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

由竖直方向受力平衡：

$$\mathrm{d}mg=\mathrm{d}N\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

小微元质量表示为：

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{2\pi}\cdot\mathrm{d}\theta$$

联立可得：

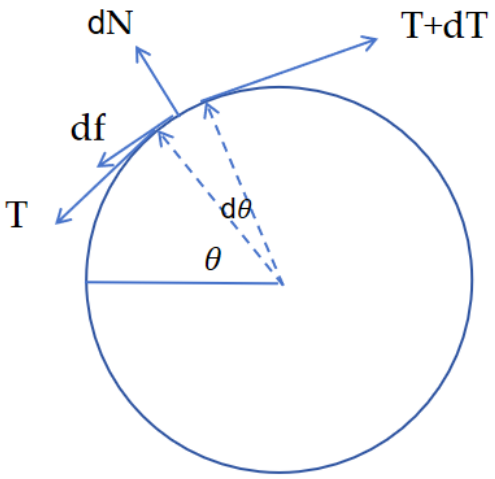
$$T=\frac{1}{2\pi}mg\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

例题 2.2 一段绳子缠绕在半径为 R 的木桩上，绕过的角度为 θ_0，现在在 $\theta=0$ 处对绳子施加拉力 T_0，在 $\theta=\theta_0$ 处施加拉力 T_1 . 已知 $T_1>T_0$，绳子处于临界滑动状态，且绳子和木桩之间的摩擦因数为 μ，求 θ 处绳子的张力 T.

笔记 本题的微元选择与上题类似，注意此时 θ 处绳子的拉力 T 是关于 θ 的函数即可.

解

微元选取和受力分析如图所示：



在切向上受力平衡：

$$T+\mathrm{d}T=\mathrm{d}f+T\Rightarrow \mathrm{d}T=\mathrm{d}f$$

在径向上受力平衡：

$$\mathrm{d}N=T\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta+(T+\mathrm{d}T)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\Rightarrow \mathrm{d}N=T\mathrm{d}\theta$$

这个公式用到了上题使用过的小角近似，并且略去了高阶小量 $\mathrm{d}T\mathrm{d}\theta$

应用临界关系：

$$\mathrm{d}f=\mu\cdot\mathrm{d}N$$

联立，得：

$$\mathrm{d}T=\mu T\mathrm{d}\theta$$

积分，有：

$$\int_{T_0}^{T}\frac{1}{T}\mathrm{d}T=\int_0^{\theta}\mu\mathrm{d}\theta$$

于是：

$$\ln\frac{T}{T_0}=\mu\theta$$

即：

$$T(\theta)=T_0\mathrm{e}^{\mu\theta}$$

我们举一个具体点的例子，对于 $\mu = 0.5$，$\theta_0 = 4\pi, T_1 \approx 535T_0$. 可以发现，如果把一根绳子在一根稍微粗糙点的木桩上绕两圈，绳子两段的拉力将有两到三个数量级的差异. 这意味着即使是很小的力，通过增加绳索的圈数，也可以产生巨大的摩擦力来对抗更大的力. 例如，一个小孩子通过将绳索在辘轳上绕几圈，就能平衡一个极大的重物，这便是著名的欧拉缰绳模型.

欧拉缰绳理论在实际中有广泛应用，例如在船只系泊、起重机操作、卷扬机钢丝绳缠绕等领域，通过合理设计绳索的缠绕圈数，可以有效控制力的传递和摩擦力的大小.

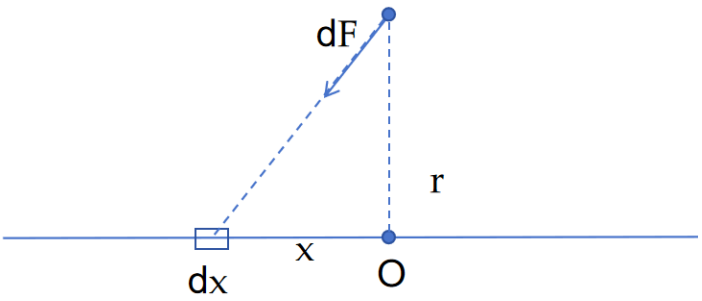
例题 2.3

求无限长匀质棒（线密度 λ）对距离棒 r 处的一质量为 m 的物体的引力.

笔记 求某物体对距离 r 处的引力时，只需要将这个物体分割成很多个面元或者线元或者体积元，并将每个微元在这个点出的受力进行叠加即可.

解

画出本题的受力分析图：



首先我们试试，在 r 处垂足建立原点，选取长度为 $\mathrm{d}x$ 的小线段为微元，此时自变量是小线段的位置 x.

由对称性知，整个棒对 m 的引力竖直向下.

则每个微元对 m 在 y 方向的引力为：

$$\frac{G \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}x \cdot m}{r^2 + x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \mathrm{d}F_y$$

式中，$\lambda \cdot \mathrm{d}x$ 为每段微元的质量，乘上 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ 表示引力在 y 方向的投影.

合力可以由积分求得：

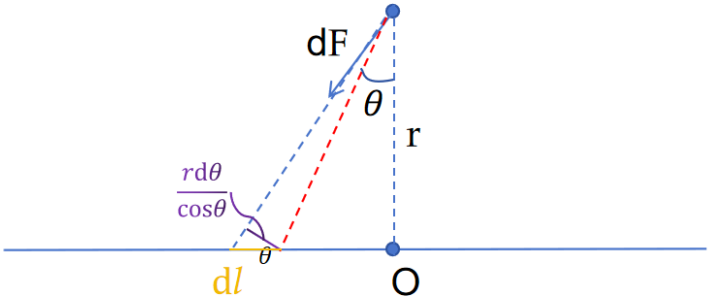
$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G \cdot m \cdot \lambda \cdot r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

这里采取换元积分，令 $x = r\tan\theta$，得：

$$F = \frac{2Gm\lambda}{r}$$

其实，这个换元积分中的 θ 就是 $\mathrm{d}F$ 与 r 的夹角. 既然换元之后积分会好算很多，我们不妨试试用 θ 来做自变量重新分析这个问题.

画出如图所示的分析图解：



取 $\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$ 处对应的棒状微元

则：

$$\mathrm{d}l = \frac{r}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

每段微元对 m 产生的 y 方向的引力可以表示为：

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\lambda \mathrm{d}l \cdot m}{\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)^2} \cdot \cos\theta$$

代入 $\mathrm{d}l$，化简积分表达式：

$$F = \int \mathrm{d}F_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{G\lambda m \cos\theta}{r}\mathrm{d}\theta$$

可以十分轻松地得到：

$$F = \frac{2G\lambda m}{r}$$

可见，微元选取方式的不同，对计算的难易程度有极大的影响.

结论 通过上述两例，我们可以总结出，在应用微元法时，需要注意以下几点：

- 对选取的微元进行受力分析时，需要明确，各个力是自己选定的自变量的函数，各个力的微小变化量可以理解为这个力的微分. 如在例 2 中，拉力 T 就是 θ 的函数，拉力在经过 $\mathrm{d}\theta$ 后变化了 $\mathrm{d}T$.
- 对于棒状对象，虽然选取对应长度为 $\mathrm{d}x$ 的小线段为微元更好想到，但积分时更难积. 因此在处理这类问题时，不妨采用如例 2 所示的，选取 θ 作为自变量.
- 在分析连续体对所选点的引力时，可以先根据对称性，判断整个物体在所选点的引力方向. 在分析每个质元对所选点的引力时，可以只计算质元在该点产生的引力在连续体真实引力方向的一个分力，这就将一个矢量积分转化成了标量积分，降低了运算的难度.
- 在微元法分析时，需要对一些小量进行合适的近似，如 $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$、$\ln(1+x) \approx x$、$\mathrm{e}^x \approx x+1$ 等，另外，还需视情况对高阶小量进行舍去.

2.3.2 定质量的牛顿第二定律

牛顿第二定律是经典力学中的一个基本定律，它描述了物体的加速度与作用在物体上的净力之间的关系. 读者对 $F = ma$ 再熟悉不过了.

实际上，牛顿第二定律的一般表达式为：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

其中，$\vec{F}$ 是作用在物体上的净力，$\vec{p}$ 是物体的动量，t 是时间. 动量 $\vec{p}$ 定义为物体的质量 m 与速度 $\vec{v}$ 的乘积，即 $\vec{p}=m\vec{v}$.

有人就要问了，既然 $a=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 那么 $\vec{F}=m\vec{a}$ 与 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 有什么区别呢?

在高中阶段，牛顿第二定律只讨论定质量情形，此时物体的质量 m 是常数，因此动量 $\vec{p}$ 的时间导数可以写为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

因此，在定质量情形下，牛顿第二定律的表达式简化为：

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

这就是伴随了大家高中三年的牛顿第二定律.

如果 m 随时间变化，动量的导数可以展开为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

因此，在变质量情形下，牛顿第二定律可以写为：

$$\vec{F}=\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+m\vec{a}$$

其中，$\vec{v}$ 是物体的速度，$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 是质量的变化率，$\vec{a}$ 是加速度.

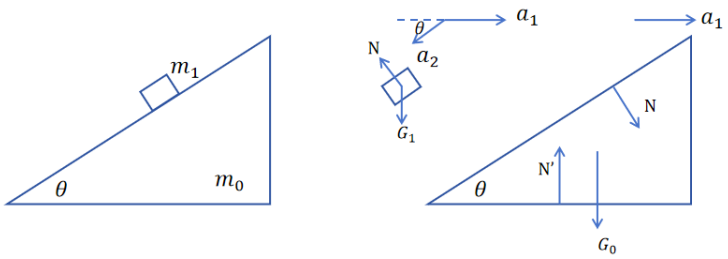
由于考试很少涉及变质量情形，定质量的牛二大家在高中又都做烂了，因此笔者只在正文部分简单提一下定质量的牛二，变质量的情形将在附录部分展开.

例题 2.4 质量为 m_0，倾角为 θ 的斜面放置在光滑水平地面上，其上方放置一个质量为 m_1 的小物块，两者之间是光滑的，现在将小物块由静止释放，问自由下滑过程中小物体相对于斜面的加速度为多少?

笔记 此题为一道经典的牛二应用题，在这里，我们对两个物体，在地面系中列出牛二即可.

解

设斜面向右加速度为 a_1，滑块相对其加速度为 a_2，各作用力如图所示：



对 m_1 在竖直方向列牛顿第二定律：

$$m_1g-N\cos\theta=m_1a_2\sin\theta$$

对 m_1 在水平方向列牛顿第二定律：

$$N \cdot \sin\theta = m_1(a_2 \cos\theta - a_1)$$

上面这个公式的右边用到了公式“绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度”

对 m_2 在水平方向列牛顿第二定律：

$$N \cdot \sin\theta = m_0 a_1$$

联立上面三个式子，解得：

$$a_2 = \frac{(m_0 + m_1)\sin\theta}{m_0 + m_1 \sin^2\theta} g$$

虽然本题在地系中考虑，列式简单，但其实联立解得的过程并不简单，我们在下一节将使用非惯性系的知识重新解答这道题.

2.3.3 惯性系和非惯性系

在我们的大物教材中，没有关于非惯性系的介绍但老师在课堂上介绍了惯性力，因此我们在这里再介绍一下非惯性系的相关内容.

非惯性系是一个非常好用的工具，也是一个重要的思维方法，对理论力学的学习帮助极大. 因此，不在考纲范围内的非惯性系，在本教材中并没有高亮展示，建议所有读者学习.

下面，我们将较为系统地为读者介绍惯性系和非惯性系的相关内容.

非惯性系和非惯性力的引入，本质是将动力学问题巧妙地转化为了静力学问题，从而简化分析过程，将解题的中心回归到熟悉的受力分析上来.

惯性系和非惯性系概述

关于什么是惯性系，什么是非惯性系的，有一段非常耐人寻味的定义：

凡是满足牛顿运动定律的参考系都是惯性系，反之是非惯性系.

如果你再去查，牛顿运动定律在什么参考系中成立，各种力学书会告诉你：

牛顿运动定律在惯性系中成立.

然后你就会发现，这两段话并没有明确说明，具体满足什么条件的参考系是惯性系. 大物书在 P85 页提到，静止或匀速直线运动的参考系是惯性系，但有加速度的参考系也可以是惯性系（详见下一小节）. 因此，惯性系的确定依靠实验、经验和所研究的问题来确定. 实际情况下，对于一个特定的问题，牛顿定律近似成立的参考系就可以作为惯性系了.

例如，研究人在操场上奔跑，地球就是一个很好的惯性系，可是在研究河流对河两岸的冲蚀、信风的形成等问题时，就必须把地球作为一个非惯性系，并引入地转偏向力来研究问题了.

根据参考系的运动特点，可以把非惯性系分成如下两类：

1. 平动非惯性系：相对于惯性系做变速直线运动的参考系. 例如：一辆正在加速的汽车，车内就是一个平动非惯性系. 在这种参考系中，物体感受到的惯性力叫平移惯性力.

2. 转动非惯性系：相对于惯性系做旋转运动的参考系. 转动非惯性系又可以进一步细分为：
   - 匀速转动非惯性系：例如，地球是一个匀速自转的参考系. 在这种参考系中，物体感受到的惯性力包括惯性离心力和科里奥利力.
   - 加速转动非惯性系：如果参考系的角速度在变化，即存在角加速度，那么它就是一个加速转动非惯性系，那么此时惯性力还要再多一项由角加速度产生惯性力，称为切向惯性力.

在判断各种参考系的类型时，有以下几点需要注意：

- 大部分情况下，可以根据参考系有无加速度来判断此参考系是否为惯性系.
- **平动非惯性系 ≠ 作变速直线运动的参考系.** 区分平动系和转动系的标准是看这个参考系本身是否相对某一惯性系旋转，即附着在这个参考系上的坐标系是否旋转. 举个简单的例子：挂在摩天轮上的吊舱，整体在绕摩天轮中心转动，但因为舱体的方向始终不变，附着在舱体上的坐标系没有转动，只是坐标原点在绕圆心旋转. 因此，吊舱是一个典型的平动系而非转动系.
- 建立非惯性系时，可以把坐标系附着在一个质点上，如果**坐标系不旋转，那么无论质点的运动是平动还是转动，这都是一个平动系**；可以把坐标系的某个轴附着在实际的转轴上，当坐标系的另外两个轴旋转时，这就是一个转动系；也可以把坐标系附着在一个刚体上，如果坐标系随刚体的转动而转动，那么这就是一个转动系，如果刚体只是在平动，那么这就是一个平动系.

下面，让我们依次来介绍这些参考系.

特殊的惯性系——自由落体参考系

自由落体参考系是一种十分特殊的参考系，其定义的具体叙述为：

自由落体参考系是指一个以自由落体运动的物体为参考系的惯性系. 在这种参考系中，所有物体（包括参考系本身）都处于自由落体状态，即仅受到引力作用而做加速度为 g 的匀加速直线运动.

举一个简单的例子：一个自由下落的电梯就是一个自由落体参考系. 在这个电梯内部，所有物体处于“失重”状态，仿佛处于惯性系中. 如果你不幸在这个电梯上，你会发现牛顿定律仍然适用：你向前扔出一个苹果，会感受到向后的冲量.

事实上，航天员在上天之前进行失重训练的一种方式，就是通过让一架飞机进行自由落体，从而在机舱内模拟出一个失重环境. 此时的机舱就是一个很好的自由落体惯性系.

学会建立自由落体系，可以快速解决一些在地面系中的复杂问题：

例题 2.5 还记得上课时候老师提到的枪打猴子的问题吗？简单回顾一下这个情景：猴子在一颗高树上，枪手想要在地上用猎枪打中猴子. 现在我们来快速证明，在忽略空气阻力的情况下，如果猴子在枪手开枪瞬间开始自由落体，那么枪手想要击中猴子，就必须在开枪前瞄准猴子.

解

我们使用自由落体参考系来思考这个问题：在开枪瞬间，我们建立一个初速度为 0、加速

度为竖直向下的重力加速度的自由落体参考系 S'. 那么，在 S' 中，猴子将是静止的，子弹则将以出膛的速度大小和方向做匀速直线运动！（因为猴子、子弹和 S' 系具有相同的加速度）

显然，匀速直线运动的物体想要击中静止的物体，只能在刚开始的时候就延两者连线的方向运动. 这就对应着猎人必须在刚开始时瞄准猴子，才能击中它.

例题 2.6 一枚礼花在空中爆炸，瞬间向四面八方发出了很多速度相同的礼花碎片. 请问经过一段时间后，在地面上的人看来，这些碎片呈什么形状?

解 成球形.

我们在自由落体参考系中考虑这个问题十分简单. 在礼花爆炸的瞬间，在礼花爆炸的位置建立一个初速度为零、加速度为重力加速度的参考系 S'. 因为所有的礼花碎片加速度都为重力加速度，因此在 S' 系中，礼花碎片的运动是向四面八方的匀速直线运动，那在经过一段时间后，所有碎片当然呈现出一个球形了.

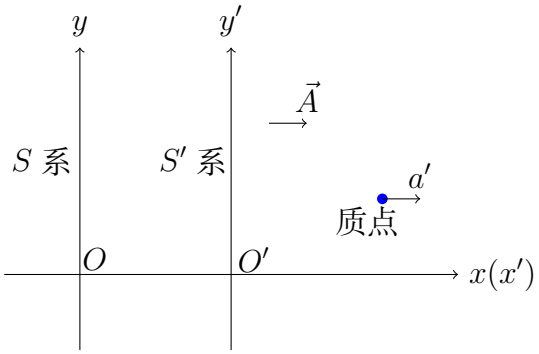
平动非惯性系和平移惯性力

正如在前两节中叙述的那样，在非惯性系中是不能直接使用牛顿定律解决问题的. 在非惯性系中应用牛顿定律，就需要在非惯性系中引入惯性力.

需要指出的是，所有惯性力都是假想力，都不是由实际的相互作用产生的. 但他们却能很好地反映出处于非惯性力中的对象的受力状态. 例如，在加速行驶的汽车中，乘客仿佛感受到一种向后的推力，这个推力就可以理解为，在汽车系中引入了一个惯性力.

在平动的非惯性系中，只会产生一种惯性力——平移惯性力. 下面我们将具体推导其公式并介绍它的具体用法.

假设有一个非惯性系 S'，它相对于惯性系 S 以加速度 $\vec{A}$ 做平动. 在 S' 中有一个质量为 m 的质点，其相对于 S' 的加速度为 $\vec{a}'$.



根据“绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度”，质点在惯性系 S 中的绝对加速度 $\vec{a}$ 可表示为:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

在惯性系 S 中，根据牛顿第二定律，质点所受的真实力 $\vec{F}$ 为:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{A})$$

为了使牛顿第二定律在非惯性系 S' 中仍然成立，我们引入一个假想的惯性力 $\vec{F}_{惯}$，使得：

$$\vec{F}+\vec{F}_{惯}=m\vec{a'}$$

将 $\vec{F}=m(\vec{a'}+\vec{A})$ 代入上式，得到：

$$m(\vec{a'}+\vec{A})+\vec{F}_{惯}=m\vec{a'}$$

移项可得：

$$\vec{F}_{惯}=-m\vec{A}$$

因此，平移惯性力的大小等于质点的质量 m 与非惯性系相对于惯性系的加速度 $\vec{A}$ 的乘积，方向与 $\vec{A}$ 相反.

用一句大白话翻译一下上面的过程：

平移惯性力的方向与所选非惯性系的加速度方向相反，大小为非惯性系中所选对象的质量 × 非惯性系的加速度大小.

在实际应用中，只需注意找准是谁的质量 × 谁的加速度，注意惯性力的方向与非惯性系加速度方向相反，即可完全掌握使用惯性力解决问题的方法.

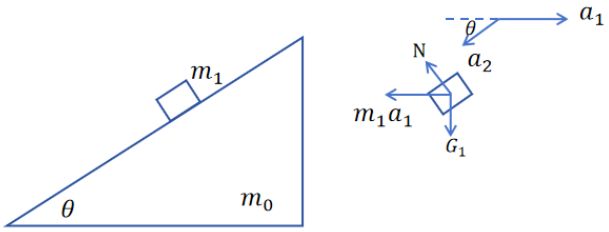
下面是几道例题，供读者进一步体会引入惯性力对问题的简化.

例题 2.7 质量为 m_0，倾角为 θ 的斜面放置在光滑水平地面上，其上方放置一个质量为 m_1 的小物块，两者之间是光滑的，现在将小物块由静止释放，问自由下滑过程中小物体相对于斜面的加速度为多少?

笔记 本题中的斜面，具有水平方向的加速度，是一个平动的非惯性系. 因此我们可以换到斜面系中分析问题，并引入平移惯性力，看看问题会不会被简化.

解

受力分析如图所示：



设斜面向右加速度为 a_1，滑块相对其加速度为 a_2.

对斜面在水平方向列牛二：

$$N\cdot\sin\theta=m_0a_1$$

在斜面参考系中考虑物块受力情况，引入向左的平移惯性力 m_1a_1 写出延斜面方向的牛顿第二定律：

$$m_1a_1\cdot\cos\theta+m_1g\sin\theta=m_1a_2$$

写出垂直于斜面方向的牛顿第二定律：

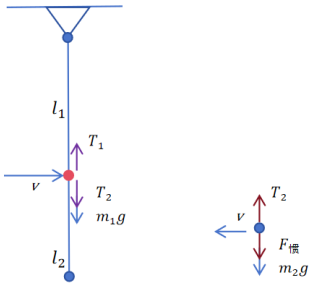
$$N + m_1 a_1 \sin\theta = m_1 g \cos\theta$$

联立解得：

$$a_2 = \frac{(m_0 + m_1)\sin\theta}{m_0 + m_1 \sin^2\theta} g$$

在这次的解题过程中，虽然列式稍微麻烦了点，但联立求解的过程会比直接在地系中分析简单一些. 在这类问题中，引入惯性力分析具有显著的优越性.

例题 2.8 如图所示，墙上悬挂质量为 m_1, m_2 的两个小球，m_1 和墙面之间用一根长为 l_1 的绳子连接，m_1 和 m_2 之间用绳长为 l_2 的绳子连接，现在对 m_1 突然施加一个冲量，使得它具有向右的速度 v，求这一瞬间 l_1 和 l_2 的拉力是多少?



笔记 本题是一道极其考察概念理解的题目，存在极多的典型错误做法，读者在自行尝试后，一定要仔细阅读题解，理解每一步的含义.

解

首先，我们在地面系考虑 m_1，在初始时刻，它绕悬挂点做圆周运动，它具有竖直向上向心加速度 a_1：

$$a_1 = \frac{v^2}{l_1} \tag{1}$$

在地面参考系对 m_1 列牛顿第二定律，受力分析如上图：

$$T_1 - T_2 - m_1 g = m_1 a_1 \tag{2}$$

现在，问题来了，想要对 m_2 列出牛二，就需要知道它的受力和加速度. 受力好说，m_2 只受到绳子的拉力 T_2 和重力 $m_2 g$，那么怎么分析 m_2 的加速度？

在地面参考系中，初始时刻，m_2 是静止的，很难确定其加速度. 但如果我们在 m_1 参考系中考虑问题，m_2 就是在绕着 m_1 作圆周运动了，圆周运动是我们喜欢的运动，因为我们可以轻松求出它向心加速度.

现在，我们 m_1 系考虑 m_2，注意到 m_1 是有竖直向上的加速度的，它是一个平动的非惯性系！因此，我们需要对 m_2 施加惯性力 $m_2 a_1$，方向竖直向下. 同时不要忘记 m_1 系有向右速度 v，因此 m_2 相对于 m_1 做速度为向左的 v 的圆周运动.

对 m_2 列牛二，受力分析如上图：

$$T_2 - m_2 g - m_2 a_1 = \frac{m_2 v^2}{l_2} \tag{3}$$

联立（1）（2）（3）式，可得：

$$T_1 = m_1 g + m_2 g + \frac{m_1 v^2}{l_1} + \frac{m_2 v^2}{l_2} + m_2 \frac{v^2}{l_2}$$

$$T_2 = m_2 g + \frac{m_2 v^2}{l_1} + \frac{m_2 v^2}{l_2}$$

转动非惯性系和惯性离心力

在匀速转动惯性系（以下简称“转动系”）中，为了使牛顿第二定律成立，需要引入惯性离心力（以下简称“离心力”）和科里奥利力. 这两种力的推导较为复杂，将放到附录中展示. 理论推导表明，当在转动系中研究的物体与转动系相对速度为零时，转动系的惯性力只有离心力一项. 事实上，大部分需要使用转动系的题目都属于这种情况. 因此，在这里我们只研究只需引入离心力的系统.

我们先直接给出离心力的计算公式：

$$\vec{F}_{离} = m\omega^2 \vec{r}$$

其中：

- m 是物体的质量.
- ω 是旋转的角速度.
- $\vec{r}$ 是旋转轴指向物体的位矢.

注意一下离心力的方向是“离心”的方向，即从轴心指向远离轴心的方向.

下面我们通过一道例题来感受一下离心力的应用.

例题 2.9 一个小球通过一根细线悬挂在天花板上做圆锥摆运动，已知小球旋转的角速度 ω，以及绳子与竖直线的夹角 θ，求绳长 L.

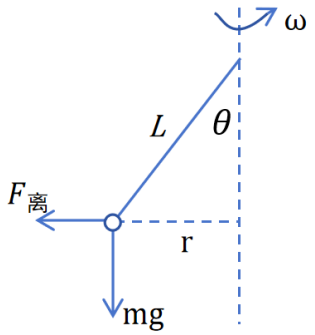
笔记 本题大家高中就会做，不过那时是使用重力的径向分力提供向心力做的. 现在我们换到以角速度 ω 绕悬挂点旋转的非惯性系 S' 中来分析问题，体会惯性离心力的用法.

解

在 S' 系中分析小球，其受重力、细线拉力以及离心力的作用，离心力表达式为：

$$F_{离} = m\omega^2 r$$

小球的受力分析如图所示：



由此得：

$$\tan\theta = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2}{g} L\sin\theta$$

解得：

$$L = \frac{g}{\omega^2\cos\theta}$$

2.3.4 动量与冲量

动量定理和冲量积分

这部分的考察十分简单和基本，高中也有很多类似的题，因此笔者在此不再赘述.

关于动量定理的矢量表达式和积分表达式，见大物教材 P141.

关于变力冲量的积分计算，见大物教材 P142.

关于质点系的动量定理，见大物教材 P148、149.

这里给出关于质点系的动量定理的几个重要结论：

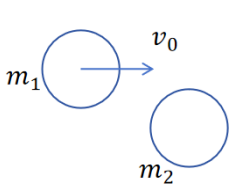
- 质点系不受外力，则质点系动量守恒
- 在某段时间内，质点系动量的增量，等于作用在质点系上所有外力在同一时间内冲量的矢量和
- 对于一个质点系，内力不改变它们的总动量（但可以改变总动能）

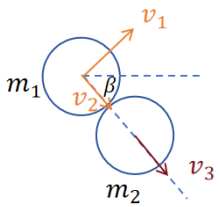
大物教材 P150 的例 4.6 是一道非常不错的质点系动量定理的题目，请读者能够学习理解该题.

2.3.5 斜碰

在高中阶段，碰撞都是对心碰撞. 在这部分中，我们解决一个简单的非对心碰撞（斜碰）问题，来更好地理解动量守恒的矢量性质.

例题 2.10 如图所示，质量为 m_1 和 m_2 的两个光滑小球发生非对心完全弹性碰撞，碰撞前 m_1 的速度为 v_0，碰撞时两球心连线的夹角为 β，求碰撞之后的各小球的速度以及分离角（碰后两球速度的夹角）.





解

设碰后 m_1 垂直于球心连线方向速度大小为 v_1，沿球心连线方向速度大小为 v_2,m_2 只有延球心连线方向的速度，大小为 v_3.

在两球心连线方向列动量守恒:

$$m_1 v_0 \cos\beta = m_2 v_3 + m_1 v_2$$

在垂直于两球心连线的方向动量守恒:

$$m_1 v_0 \sin\beta = m_1 v_1$$

动能守恒:

$$\frac{1}{2}m_1(v_0^2) = \frac{1}{2}m_1(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}m_2 v_3^2$$

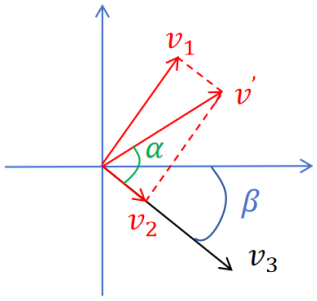
联立上述三式解得:

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \cos\beta$$

$$v_1 = v_0 \sin\beta$$

$$v_3 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \cos\beta$$

下面计算分离角. 设碰后 m_1 的速度矢量为 $\vec{v'}$, 分离角为 α:
由几何关系, 有:



$$\tan\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \tan\beta \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}$$

不难发现, 当 $m_1 = m_2$ 时, 分离角为 $90°$. 这说明, 打台球时, 不考虑母球的旋转的话, 母球击中目标球后, 会与目标球延两个近似垂直的方向分离.

简单冲击问题

冲击问题是动量定理的一种简单应用. 大家高中也接触过冲击问题, 比如水流冲击水桶, 让水桶悬浮这种题.

笔者在这里也给出一道经典的冲击问题, 带大家复习一下这种题目的一般做法.

例题 2.11 有一条软绳, 绳长为 L, 总质量为 m, 现将其悬挂起来, 在绳子的底端放置一个电子秤, 初始时, 绳子的下端刚好接触称的表面. 现在释放软绳让其开始下落, 求当绳子的顶端下落了 x 时, 电子称的示数为多少?

笔记 在解答这道题时, 首先要明白题目中所给的各个条件的含义. "软绳" 代表绳子只能在被拉伸时提供拉力, 不能在被压缩时提供推力. 也就是说, 在绳子下端接触电子称的过程中, 除接触电子称的一小部分受到来自电子称的冲击力外, 其余部分感受不到这种冲击, 依然保持

自由落体. “电子称的示数” 表示要求解的是各个时刻，绳子对电子称产生的压力大小. 这个压力由两部分组成，一部分是已经落到电子称上的绳子对电子称产生的压力，另一部分是电子称对绳子末端冲击力的反作用力，解题时需要分别计算这两部分力.

解

软绳下落了 x 时，下落速度为 v. 在经过了一段极短的 $\mathrm{d}t$ 时间后，有长为 $\mathrm{d}x$ 的绳元与电子称发生作用：

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

而在 $\mathrm{d}t$ 时间内，有 $\mathrm{d}m$ 的绳子由速度 v 变为 0, 得：

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\mathrm{d}x$$

对这 $\mathrm{d}m$ 的绳子列动量定理，得到电子称对绳子末端的冲击力 N：

$$N\mathrm{d}t = \mathrm{d}m \cdot v$$

由牛顿第三定律，绳子末端对电子称产生冲击力 N'：

$$N' = N$$

绳子其它部分做自由落体

$$v^2 = 2gx$$

联立上述五式，再考虑电子称上已经有的绳子对电子称产生的压力，得到当绳子下降 x 时，电子称的示数 F 为：

$$F = \frac{x}{\lambda}mg + N' = \frac{3mgx}{\lambda}$$

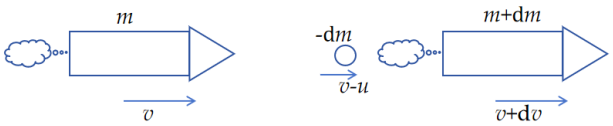
2.3.6 变质量动力学初步

变质量问题是动量定理的又一应用，在这里我们直接给出两道例题，在例题中体会和总结处理变质量问题的一般方法：

例题 2.12 “西迁号” 火箭在四大发明广场发射. 其初始总质量为 M_0，其中包括燃料质量 m_0，燃料总是以相对于火箭以速度 u 而喷射出去，求燃料耗尽时，“西迁号” 的最终速度为多少? 因为火箭的推力足够大，我们忽略重力，阻力等对火箭的影响，且认为火箭始终延直线运动.

笔记 这是一种典型的变质量问题，有多种解题方法，下面给出两种解法. 在解题过程中，需要特别注意各个物理量的正方向及其符号.

解



法一：动量守恒法

设火箭质量为 m 时，速度为 v，喷射质量为 $-\mathrm{d}m$ 燃料（$\mathrm{d}m$ 是火箭质量的变化量，因为火箭质量在减小，所以 $\mathrm{d}m$ 小于零，$-\mathrm{d}m$ 大于零）

由喷射前后，火箭主体和喷出去的燃料组成的系统动量守恒，得：

$$mv = -\mathrm{d}m \cdot (v-u) + (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}u)$$

略去二阶小量，化简得：

$$u\mathrm{d}m = -m\mathrm{d}v$$

移项、积分有：

$$\int_{M_0}^{M_0-m_0} \frac{u}{m}\mathrm{d}m = -\int_0^v \mathrm{d}v$$

解得：

$$v = u\ln\frac{M_0}{M_0-m_0}$$

法二：冲击力法

取一段极短的时间 $\mathrm{d}t$，喷出去了 $-\mathrm{d}m$ 的燃料.

设此时，火箭的速度 v 向右，并取向右为所有矢量的正方向，那么如果矢量的方向向左就是负值. 设喷出去的燃料受到来自火箭的冲击力为 F，对它被喷出前后这段过程列动量定理：

$$F\mathrm{d}t = (-\mathrm{d}m)[(v-u)-v]$$

化简得：

$$F\mathrm{d}t = u\mathrm{d}m \tag{1}$$

由牛顿第三定律，火箭主体受到了 $-F$ 的冲击力. 对火箭主体列动量定理：

$$-F\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v \tag{2}$$

联立（1）（2）：

$$u\mathrm{d}m = -m\mathrm{d}v$$

下同法一.

例题 2.13 “西迁号”进入深空后，释放出了一质量为 m_0、面积为 A 的圆盘. 圆盘受西迁精神驱动，受一垂直于盘面的常力 F 的作用. 现在圆盘进入了一团静止的密度为 ρ 的尘埃，假定凡与圆盘相遇的尘埃统统粘在盘面上，圆盘的初速度为零. 求圆盘前进的距离和时间的关系.

解

本题我们采用质点系的动量定理来解答，读者也可以尝试使用上一题使用的两种方法.

设 t 时刻质量为 m，速度为 v，前进了 x

对圆盘和 $\mathrm{d}t$ 后吸附在圆盘上的尘埃整体列质点系的动量定理：

$$F\mathrm{d}t = (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v) - mv \tag{1}$$

其中：

$$\mathrm{d}m = v\mathrm{d}t\rho A \tag{2}$$

将（2）代入（1），化简，并略去二阶小量，得：

$$F = v^2\rho A + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

发现其中 m 是 t 的函数，这导致（3）不是一个运动学微分方程. 因此我们要把 m 用运动学量来进行替换：

$$\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m = \int_0^t v\mathrm{d}t\cdot\rho A$$
$$\Rightarrow m - m_0 = \rho A x$$

代回（3），得：

$$F = v^2\rho A + (\rho A x + m_0)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

这已经是一个运动学微分方程了，下面就进入了高数的部分，读者如果只是为了练习动量的知识，就可以到此为止了.

两边同乘 $\mathrm{d}t$：

$$F\mathrm{d}t = \rho A v\mathrm{d}x + \rho A x\mathrm{d}v + m_0\mathrm{d}v$$

凑微分，得：

$$F\mathrm{d}t = \rho A\mathrm{d}(vx) + m_0\mathrm{d}v$$

积分：

$$Ft = \rho A(vx + m_0 v)$$

即：

$$Ft = (\rho A x + m_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

移项后积分：

$$\int_0^t F\mathrm{d}t = \int_0^x (\rho A x + m_0)\mathrm{d}x$$

得到：

$$\frac{1}{2}Ft^2 = \frac{1}{2}\rho A x^2 + m_0 x$$

解一个二次方程：

$$x = \frac{-m_0 + \sqrt{m_0^2 + \rho A F t^2}}{\rho A}$$

已舍去不合理的负解.

2.4 真题练习

✍ **练习 2.1** 一子弹以水平速度 v_0 射入一静止于光滑水平面上的木块后，随木块一起运动，下述说法正确的（　）

A. 子弹、木块组成的系统机械能守恒.

B. 子弹、木块组成的系统水平方向的动量守恒.

C. 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量.

D. 子弹动能的减少等于木块动能的增加.

解 **B**

练习 2.2 若将一质量线密度为 λ 的均匀细线弯成半径为 R 的圆环，则质量为 m 的质点放在环中心点时的引力势能和引力分别为（　　）

笔记 本题需要使用引力势能的公式，没学过第三章的同学，这里给出点元 dm 在 r 处产生的引力势能的公式：$\mathrm{d}U=-\dfrac{GM\mathrm{d}m}{r}$.

A. $0,0$

B. $-2\pi G\lambda m,\dfrac{2\pi G\lambda m}{R}$

C. $-2\pi G\lambda m,0$

D. $0,\dfrac{2\pi G\lambda m}{R}$

解 **C**

对于引力势能的计算，在圆环上取微元进行积分，得到 $\displaystyle\int_0^{2\pi}-\frac{Gm\lambda R}{R}\mathrm{d}\theta=-2\pi G\lambda m$

对于引力，由于对称性可以得到，中心引力为 0.

练习 2.3 一端悬挂在天花板上的铅垂橡皮筋，其张力的大小按 $f=ax^2$ 变化，a 是一个正的常量，下端不挂重物时作为坐标原点，橡皮筋质量不计. 今在其下端悬挂一质量为 m 的物体，在 $x=0$ 处自静止释放，则物体能达到的最大位移为 ()

A. $\sqrt{\dfrac{mg}{a}}$

B. $\sqrt{\dfrac{3mg}{a}}$

C. $\dfrac{2mg}{a}$

D. $\dfrac{3mg}{a}$

笔记 本题用能量守恒做是更简单的方法，但在此章节中，推荐大家尝试使用牛顿第二定律，列出运动学方程，解微分方程求解.

解 **B**

对物体进行受力分析，$mg-ax^2=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

分离变量积分可得：$mgx-\dfrac{1}{3}ax^3=\dfrac{1}{2}mv^2$

根据 $v=0$，计算得到最大位移 x.

练习 2.4 一个力 F 作用在质量为 1.0kg 的质点上，使之沿 x 轴运动. 已知在此力作用下质点的动力学方程为 $x=3t-4t^2+t^3$ (SI). 在 0 到 4s 的时间间隔内，力 F 的冲量大小 $I=$(　　)

解 $16\,\mathrm{kg\cdot m/s}$

$I=F\Delta t=m\Delta v$

将位移对时间求导可得：$v=3-8t+3t^2$

代入数据可以得到 I

练习 2.5 一质量为 m 的小球，以速率为 v_0、与水平面夹角为 $60°$ 的仰角作斜抛运动，不计空气阻力，小球从抛出点到最高点这一过程中所受合外力的冲量大小为（　）冲量的方向为（　）

解 $\frac{\sqrt{3}}{2}mv_0$　竖直向下

冲量等于动量改变量，重力方向竖直向下，冲量方向竖直向下.

2.5 内容扩展

2.5.1 惯性离心力和科里奥利力的推导

这部分的推导内容较为复杂，大物范围内不要求掌握，记住公式会用即可. 有兴趣和基础的同学可以阅读了解.

基本设定

考虑一个匀速旋转的非惯性系 S'，其角速度为 $\vec{\omega}$，在惯性系 S 中观察到的物体位置为 $\vec{r}$，在非惯性系 S' 中的位置为 $\vec{r}'$. 假设物体在 S' 系中具有相对速度 $\vec{v}'$ 和相对加速度 $\vec{a}'$.

为了计算非惯性力，我们首先要清楚加速度在不同参考系中是怎样变换的.

加速度变换公式

首先，我们来介绍一下，加速度在匀速转动参考系下的变换公式：

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

这个公式的证明十分复杂，详见《力学（物理类）（第二版）（舒幼生编著）》P96 页. 公式中，第一项代表物体在转动系中的相对加速度，第二项代表物体在转动系中发生相对运动导致的科氏加速度，第三项则是转动系转动时产生的向心加速度，属于牵连加速度.

惯性力的引入

为了使牛顿第二定律在非惯性系 S' 中仍然成立，需要引入惯性力. 假设在 S' 系中，物体所受的总力为 $\vec{F}'$，则：

$$\vec{F}' + \vec{F}_{惯} = m\vec{a}'$$

其中，$\vec{F}_{惯}$ 是惯性力.

根据加速度变换公式：

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

将 $\vec{a}$ 代入牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

为了使 $\vec{F}' = \vec{F}$ 在 S' 系中成立，惯性力 $\vec{F}_{惯}$ 必须满足：

$$\vec{F}_{惯} = -m(2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

通过观察分析上式，我们就可以得到在转动系中各个惯性力的表达式.

惯性离心力

当物体在 S' 系中静止时，$\vec{v}' = 0$ 且 $\vec{a}' = 0$，惯性力可以化简为:

$$\vec{F}_{惯} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

根据向量三重积公式：

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

由于 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{r}'$ 垂直，上式简化为：

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega^2\vec{r}'$$

此时的惯性力就是惯性离心力，表达式为：

$$\vec{F}_{离} = m\omega^2\vec{r}'$$

科里奥利力

当物体在 S' 系中具有相对速度 $\vec{v}'$ 时，惯性力表达式中的第二项不为零，这就代表科里奥利力，简称科氏力：

$$\vec{F}_{科} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

物理意义

- 惯性离心力：为了解释在非惯性系中观察到的物体远离旋转中心的现象而引入的虚拟力. 它与向心力等大反向，方向沿半径背离旋转轴.
- 科里奥利力：为了解释在非惯性系中观察到的物体运动轨迹偏转的现象而引入的虚拟力. 它的方向垂直于物体的相对速度和旋转轴，且大小与相对速度和角速度成正比.

结论

在匀速旋转的非惯性系中，惯性离心力和科里奥利力的公式分别为：

$$\vec{F}_{离} = m\omega^2\vec{r}'$$

$$\vec{F}_{科} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

它们都是虚拟力，用于在非惯性系中修正牛顿运动定律.

2.5.2 质心及质心运动定理

质心的计算

关于质心的定义和基本公式，详见大物教材 P162-P164，这里不再赘述，只是再罗列出来几个重要公式：

对于离散物体，质心的位置可以通过以下公式计算：

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

其中，m_i 是第 i 个物体的质量，$\vec{r}_i$ 是第 i 个物体的位置向量.

对于连续物体，质心的位置可以通过以下公式计算：

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

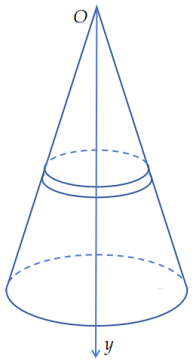
其中，$\vec{r}_c$ 是质心的位置向量，M 是物体的总质量，$\vec{r}$ 是物体内某点的位置向量，$\mathrm{d}m$ 是该点的质量元.

下面，给出几个例题，来具体应用一下质心的计算公式.

例题 2.14 求高为 h 的匀质实圆锥质心高度坐标.

解

以圆锥顶点为原点，指向圆锥底面方向为正方向. 设圆锥底面半径为 R，密度为 ρ. 以如图所示的方式分割体积微元：

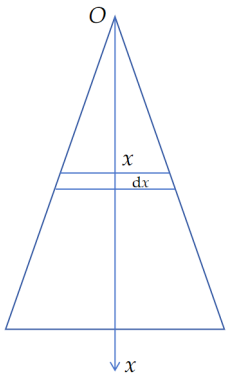


$$h_c = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^h y \cdot \rho\pi\frac{R^2y^2}{h^2}\mathrm{d}y}{\int_0^h \rho\pi\frac{R^2y^2}{h^2}\mathrm{d}y} = \frac{3}{4}h$$

例题 2.15 求匀质等腰三角形质心坐标，已知三角形高为 h，底为 A，面密度为 ρ.

解

以等腰三角形顶点为原点，指向底边的方向为正方向，按如图所示的方法分割面元：

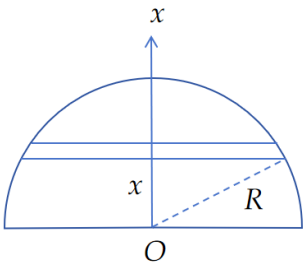


$$x_c = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^h x\sigma\frac{Ax}{h}\mathrm{d}x}{\int_0^h \sigma\frac{Ax}{h}\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}h$$

例题 2.16 求半圆质心坐标，已知半径为 R，面密度 σ.

解

按如图所示建立坐标系，分割面元：



$$x_c = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\pi\sigma\mathrm{d}x}{\int_0^R 2\sqrt{R^2-x^2}\pi\sigma\mathrm{d}x} = \frac{4R}{3\pi}$$

结论 计算质心的一般步骤可以归结为：

- 考虑物体的对称性，选取适当的坐标轴和分割方式，将立体图形分割成体积元，将平面图形分割成面元.
- 正确表达质心坐标公式中的 dm，代入公式计算即可.

质心运动定理

质心运动定理的具体推导见大物书 P165

其推导的基本思想就是对质心坐标公式进行求导，难度不大，不再赘述.

这里给出几条质心运动定理的重要结论：

- 质心运动定理的核心思想是：一个物体系统（无论它是由多少个质点组成的）的质心的运动，就好像把系统受到的所有外力都集中作用在质心上一样. 换句话说，质心的加速度与系统受到的合外力成正比，与系统的总质量成反比. 这与牛顿第二定律非常相似，只不过这里描述的是整个系统的质心.

- 系统的总动量等于系统的总质量乘以质心的速度. 这意味着系统的整体运动可以用质心的运动来描述，而系统的动量变化只与外力有关，与内力无关.
- 正因质心动量是系统的总动量，那么质心系相对质心的动量一定为零，如果以系统的质心为参考系，在这个参考系中各质点的动量之和为零，即**质心系是零动量系**. 这一特性在解题中时常会用到.
- 质心运动定理不仅适用于经典力学，也适用于相对论情况. 在微观高能高速情况下，上面三条性质仍然成立.

例题 2.17 一条非弹性的金属小环链条堆放在光滑的水平桌面，总长为 l，线密度为 ρ，一端刚好穿过光滑小孔，从零时刻开始下落，桌上剩余的链条保持静止. 忽略孔处的复杂受力，求链条下端的运动学方程.

解

以小孔为原点，竖直向下为正方向，建立 y 轴.

计算下端坐标为 y 时的质心坐标:

$$y_c = \frac{\int_0^y y \cdot \rho \mathrm{d}y + 0}{\rho l} = \frac{y^2}{2l}$$

对时间求导得质心速度:

$$v_c = \frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{l} \cdot v$$

再求导得加速度:

$$a_c = \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{l}(v^2 + ya) \tag{1}$$

对质心的牛顿第二定律:

$$\rho l a_c = \rho y g \tag{2}$$

(2) 代入 (1):

$$yg = y \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2$$

简单变形:

$$yg = y \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \cdot v + v^2$$

移项得:

$$yg\mathrm{d}y = yv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}y$$

两边同乘 $2y$ 用于凑微分:

$$2y^2 g\mathrm{d}y = 2y^2 v\mathrm{d}v + 2v^2 y\mathrm{d}y$$

即:

$$\frac{2}{3}gy^3 = \mathrm{d}v^2 y^2$$

积分得:

$$\frac{2}{3}gy^3 = v^2y$$

解得：

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}yg}$$

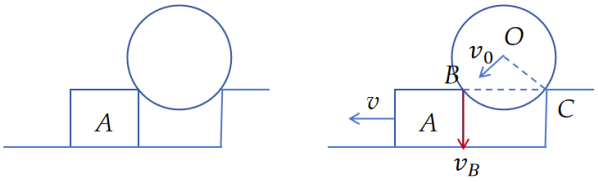
发现这是匀加速直线运动的速度公式，易得：

$$y = \frac{1}{6}gt^2$$

此题若从牛顿第二定律和动量定理出发，还有其他做法，读者不妨自己进行尝试.

2.5.3 习题扩展

例题 2.18 一个密度均匀的圆柱，质量为 m，半径为 R，放在两个等高的台阶上，台阶一个固定不动，一个可无摩擦地滑动，如图 1 所示. 当两支点的距离为 $\sqrt{2}R$ 时，固定台阶对圆柱的支持力为 N，求此时可动台阶 A 的滑动速度. 设所有摩擦均可忽略不计.



解

如图，圆柱的质心 O 相对于固定点 C 作圆周运动，以 v_0 表示其速度大小，则由重力延 OC 方向的分力提供向心力：

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg\cos 45^\circ - N,$$

解得：

$$v_0 = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}mg - 2N)R}{2m}}.$$

由于 $BC = \sqrt{2}R$，故轮缘 B 点的速度

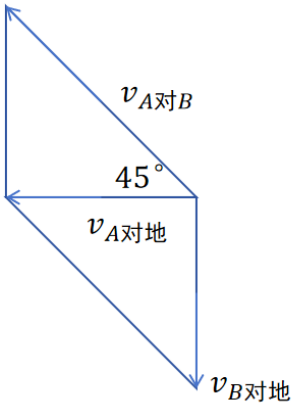
$$v_B = \sqrt{2}v_0,$$

现在，为了通过 B 点的速度求出 A 的速度，我们可以换到 B 的参考系中考虑，由绝对速度 = 相对速度 + 牵连速度，我们可以得到：

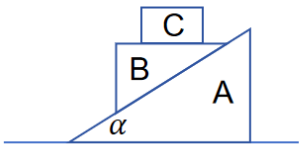
$$\vec{v}_{A对地} = \vec{v}_{A对B} + \vec{v}_{B对地},$$

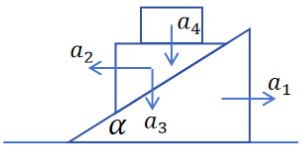
即为下图所示的关系，由图可见 $\vec{v}_{A对地}=\vec{v}_{B对地}$，即

$$v=\vec{v}_{A对地}=v_B=\sqrt{2}v_0=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}mg-2N)R}{m}}.$$



例题 2.19 斜面体 A 置于水平面上，其斜面的倾角为 α，斜面体 B 的斜面恰与 A 的斜面重合，而 B 的上表面呈水平状态，物块 C 则置于 B 的上表面上. 已知 ABC 三者质量相等，现将三者同时由静止释放，不计一切摩擦，求刚释放后物块 C 的加速度.





解

由题述知，A 的加速度只能沿水平方向，设为 a_1，又以 a_2 表示 B 的加速度的水平分量，a_3 表示 B 的加速度的竖直分量，物体 C 由于不受水平外力作用，则其加速度只能沿竖直方向，设其为 a_4. 各加速度如图所示.

由于 A、B 等质量，则由质点系的牛顿第二定律可得:

$$a_1=a_2. \tag{1}$$

由于 C、B 在竖直方向上无相对运动，则有

$$a_3=a_4. \tag{2}$$

由于 A、B 在垂直于斜面方向上无相对运动，故两者的加速度在此方向上的投影应该相等:

$$a_3\cos\alpha-a_2\sin\alpha=a_1\sin\alpha. \tag{3}$$

又设 A、B 间相互作用力大小为 N，以 m 表示每个物块的质量，则对于 A 有

$$N\sin\alpha=ma_1, \tag{4}$$

而对于 B、C 在竖直方向上列方程则有

$$2mg - N\cos\alpha = ma_3 + ma_4. \tag{5}$$

联立 (1)-(5) 式可解得：

$$a_1 = a_2 = \frac{2}{2\tan\alpha + \cot\alpha}g, \quad a_3 = a_4 = \frac{4}{4 + \cot^2\alpha}g.$$

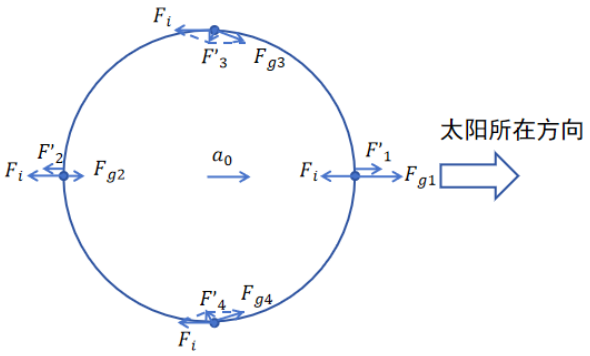
例题 2.20 地球在太阳引力作用下绕太阳运动是形成潮汐原因之一. 将地球运动轨道近似处理成圆，试在球心建立绕太阳运动的平动非惯性系，引入平移惯性力，用半定量的方法解释一天两次潮起潮落的现象.

解

太阳质量记为 M，地球公转轨道半径记为 r，在太阳引力作用下，地球（球心）作圆周运动的向心加速度大小为：

$$a_0 = \frac{GM}{r^2}.$$

如题干叙述，换到球心平动非惯性系，在地球表面附近取质量同为 m 的部位 1, 2, 3, 4，如下图所示：



它们的平移惯性力 F_i 相同，方向背离太阳，大小为

$$F_i = ma_0 = \frac{GMm}{r^2},$$

地球半径记为 R，m 在 1 处受指向太阳的引力 F_{g1}，大小为

$$F_{g1} = \frac{GMm}{(r-R)^2} > F_i,$$

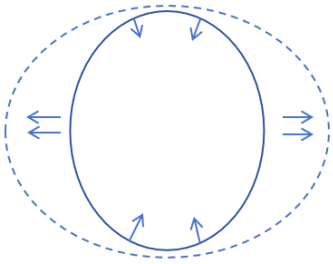
因此在 1 处，物体受到的表观力指向太阳，即背离地球中心.m 在 2 处受指向太阳的引力 F_{g2}，大小为：

$$F_{g2} = \frac{GMm}{(r+R)^2} < F_i,$$

因此，在 2 处的表观力背离太阳，也即背离地球中心.

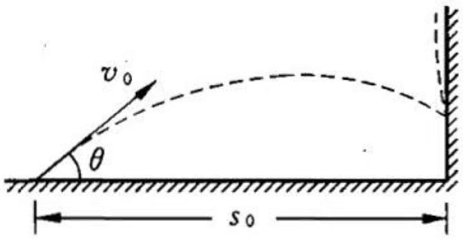
m 在 3 处的 F_{g3} 指向太阳，与 F_i 的夹角却是略小于 180° 的钝角，合成的表观力 F'_3 几乎是指向地球中心. 同理，m 在 4 处的表观力 F'_4 也近似指向地球中心.

地球表面附近各处表观力分布，由 1, 2, 3, 4 处表观力间连续过渡而成，海水表面因而显现下图虚线所示的形状（比例已被夸大）：



考虑到地球的自转，这样的表面形状便会逆着地球自转方向相对地球表面移动，造成同一地点一天内出现涨落两次的潮汐现象.

例题 2.21 军训时，一位兵王自距墙 s_0 处以速度 v_0 起跳，如下图所示，再用脚蹬墙面一次，使身体变为竖直向上运动而继续升高. 若墙面与鞋底之间的静摩擦因数为 μ，求能使人体重心有最大总升高的起跳角 θ 是多少?



解

设人的质量为 M，以 θ 角起跳，历时 t 到墙面，到墙面时，人的速度水平分量 v_x，竖直分量 v_y 则有:

$$v_x = v_0 \cos\theta, \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

上升高度:

$$H_1 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

运动学关系:

$$t = \frac{s_0}{v_0 \cos\theta}$$

代入有:

$$H_1 = s_0 \tan\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{s_0}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

接下来分析蹬墙面上升的过程.

兵王利用墙对人的摩擦力产生向上的冲量让自己上升，为了让这一冲量最大化，认为摩擦力始终是最大静摩擦力:

$$M\Delta v_y = \int_0^{t_1} F(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \mu N(t)\mathrm{d}t = \mu \int_0^{t_1} N(t)\mathrm{d}t$$

其中 $N(t)$ 为墙对人的正压力，正压力冲量使水平速度变为 0：

$$\int_0^{t_2} N(t)\mathrm{d}t = Mv_x$$

为了使向上的冲量最大，需要在蹬墙的过程中始终存在摩擦力，即正压力的作用时间与摩擦力相同：

$$t_1 = t_2$$

于是

$$\Delta v_y = \mu v_x$$

则蹬墙后速度为：

$$v_y' = v_y + \Delta v_y = v_y + \mu v_x$$

升高量：

$$\Delta H_2 = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{(v_y + \mu v_x)^2}{2g}$$

总升高量：

$$H = H_1 + \Delta H_2 = \frac{v_0^2(\mu\cos\theta + \sin\theta)^2}{2g} - \mu s_0$$

上式可改写为

$$H = \frac{v_0^2}{2g}(1+\mu^2)\left[\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\theta\right]^2 - \mu s_0$$

令 $\tan\varphi = \dfrac{1}{\mu}$，利用辅助角公式，则上式变为：

$$H = \frac{v_0^2}{2g}(1+\mu^2)\cos^2(\varphi - \theta) - \mu s_0$$

可见，当 $\theta = \varphi$，即

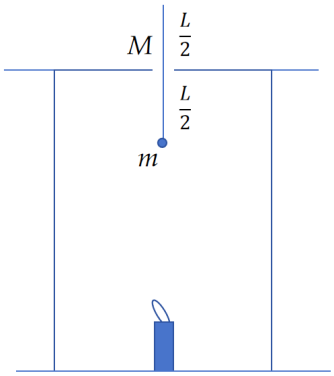
$$\theta = \arctan\frac{1}{\mu}$$

时，H 有最大值为

$$H = \frac{v_0^2}{2g}(1+\mu^2) - \mu s_0$$

例题 2.22 足够高的桌面上开一小孔，长 L，质量 M 的均匀细杆竖直穿过小孔，一半在孔的上方. 细杆下端有一质量 $m < M$ 的小虫，小虫正下方的地面上有一支点燃的蜡烛，如下图所示. 设开始时细杆、小虫均处于静止状态，而后在系统自由释放后的瞬间，小虫以相对细杆恒定的速度 v 向上爬行，且在到达小孔前始终未离开杆.

1. 小虫为避免被蜡烛烧伤，v 可取的最小值 v_0 多大?
2. 小虫取 v_0 相对细杆向上爬行，爬到小孔处相对桌面的速度 v_m 多大?



笔记 小虫相对于细杆向上爬行，实际为变速运动，题文取平均，模型化为匀速运动. 按此模型，在初速为零的自由落体参考系中，小虫与细杆在开始后的极短时间内形成相对速度 v 后，两者间便无相对加速度，因此便无相互作用力. 还原到地面系，这可等效为开始时小虫借助细杆向上跳跃，获得向上初速度 $v_{m(0)}$，极短时间内，系统动量守恒，细杆获得向下的初速度 $v_{M(0)}$. 而后，小虫、细杆分别作上抛、下落运动.

小虫为到孔位，$v_{m(0)}$ 似乎可小到 $\sqrt{2g\cdot\frac{L}{2}}$，但需注意，题文规定“在到达小孔前始终未离开杆”，$v_{m(0)}$ 过小，小虫上行时间过长，下落的细杆有可能在此时间内其顶部已落在小孔之下，这将不符合题文要求.

解

(1)

在极短时间内略去重力冲量，如上所述，系统动量守恒，可得:

$$v_{M(0)} = \frac{m}{M}v_{m(0)},$$

小虫相对细杆的匀速度便为:

$$v = v_{m(0)} + v_{M(0)} = \frac{M+m}{M}v_{m(0)}.$$

为使小虫到达孔位前未离开细杆，至少要求细杆顶端恰好也落到孔位. 设所经时间为 t，则有:

$$vt = L, \quad v_{M(0)}t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{L}{2},$$

由此解得的 v 就是题文要求的 v_0，为：

$$v_0 = \sqrt{\frac{M+m}{M-m}gL}.$$

(2)

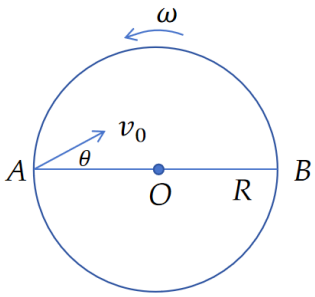
取 v_0，小虫相对地面的上抛初速度为：

$$v_{m(0)} = \frac{M}{M+m}v_0 = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-m^2}gL},$$

经 $L/2$ 路程，到达小孔时相对桌面的向上速度大小为：

$$v_m = \sqrt{v_{m(0)}^2 - 2g\frac{L}{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{M^2-m^2}gL}.$$

例题 2.23 如下图所示，半径 R 的水平圆盘绕通过盘中心 O 的竖直轴以角速度 ω 匀速旋转. 盘上的射手站在边缘 A 处，相对于盘以水平速度 v_0 发射子弹，目标是直径 AB 另一端、随盘一起旋转的等高点 B. 设 ω 恒定不变，且因为子弹的速度很快，所以 $\omega R \ll v_0$，重力和空气阻力均可略，为击中 B，试求发射方向与直径 AB 间的夹角 θ，并确定子弹相对圆盘的轨迹线.



笔记 此题显然是应该换到圆盘这一转动非惯性系中考虑问题. 因为有 $\omega R \ll v_0$ 的条件，结合科氏力和离心力的公式，发现在此题中，科氏力远大于离心力，因此在后续的计算中，我们可以忽略离心力. 在计算的过程中，注意科氏力方向始终垂直于速度，因此在单一科氏力的作用下，物体将作匀速圆周运动. 这和带电粒子在匀强磁场中受到洛伦兹力做匀速圆周运动十分类似.

解

略去离心力，比较科氏力和洛伦兹力的公式：

$$F_{\text{Cor}} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad F_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

发现两者十分类似. 带电粒子在垂直于匀强磁场 B 的平面上作匀速圆周运动，子弹在垂直于定常 ω 的水平面上也作匀速圆周运动.

列出径向的牛顿第二定律：

$$\frac{mv_0^2}{r} = 2mv_0\omega,$$

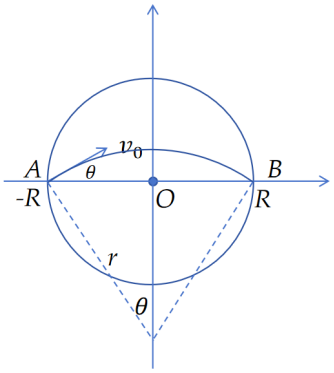
得圆周运动的半径：

$$r = \frac{v_0}{2\omega}$$

为使轨道圆通过 B 点，必须满足几何关系 $R = r\sin\theta$，即得发射角：

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2\omega R}{v_0}\right),$$

几何关系如下图所示：



因此轨迹圆圆心坐标为：

$$x = 0, \quad y = -\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2 - R^2},$$

轨道圆方程为

$$x^2 + \left[y + \sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2 - R^2}\right]^2 = \frac{v_0^2}{4\omega^2}.$$

子弹轨迹线是图示的圆弧线.

第 3 章 功能关系

3.1 引言

在物理学中，功能关系是理解能量转换和守恒的核心. 本章将深入探讨功和能的基本概念，包括变力做功的矢量和积分表达式、动能、势能以及势能与保守力的关系. 我们将推导各种势能的表达式，并详细讲解功能原理和机械能守恒定律，帮助同学们掌握这些原理. 此外，我们还将介绍使用能量法判断平衡的类型，为后续理论力学的学习打下基础.

笔者认为，理解定理的推导过程对于定理的理解是十分重要的，因此本章使用了大篇幅进行定理和结论的推导.

此外，本章知识拓展部分较少，因此取消了“习题拓展”部分，将题目集中放在了 3.3.4 节.

3.2 考情速递

考察难度中等，考情如下：

1. 喜欢考察关于**质点系内力做功的概念题**，学习时注意深刻理解基本概念.
2. 几乎必考题型：**给一个势能的表达式，求对应保守力的表达式**.
3. 几乎必考题型：**给变力的表达式，积分做功**.
4. 经常将机械能守恒与动量定理结合，但这类题目不涉及转动，难度不大.
5. 难度较大的题目一般都与刚体相结合，请同学们注意刚体动力学的学习.

3.3 概念剖析

3.3.1 变力做功

关于变力做功的讲解，见大物教材 P94-P95，这里不再赘述，只给出几点说明：

1. 元功（力与微小位移的内积）是标量，没有方向，但是有正负之分，因此由元功积分得到的功也分正负. 考试题很喜欢在这里挖坑，例如：物体在粗糙斜面上匀速下滑时，摩擦力做的功 $\neq$ 重力做的功，因为摩擦力做负功，重力做正功.
2. 题目如果给出了 $F-t$ 关系，不要死套公式，硬找 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}t$ 的关系，这会加大积分的运算量，建议通过 $a-t$ 关系积分出末速度，然后用动能定理即可.

下面给出几道例题：

例题 3.1

已知物体受到原点引力，距离为 r 时，引力 $F=\dfrac{k}{a^2+r^2}$，求该物体从 $r=r_1$ 运动到 $r=r_2$ 时，引力做的功.

解

由做功定义：

$$\mathrm{d}W = -F\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}W = -\frac{k}{a^2+r^2}\mathrm{d}r$$

积分，有：

$$W = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{k}{a^2+r^2}\mathrm{d}r = \frac{k}{a}\left(\arctan\left(\frac{r_1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{r_2}{a}\right)\right)$$

例题 3.2 在极坐标下，质量为 m 的物体所受力可写为

$$F_r = \frac{2k\cos\theta}{r^3} \quad F_\theta = \frac{k\sin\theta}{r^3}$$

其中，F_r 为径向受力（向外为正），F_θ 为其切向受力（以 θ 增大方向为正）.

现将其从 $r = r_0, \theta = \alpha$ 处沿圆周运动至 $r = r_0, \theta = \beta$ 处，求力场对物体做的功.

解

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_r\mathrm{d}r + F_\theta r\mathrm{d}\theta$$

由于径向距离不发生变化，因此径向分力不做功，元功只考虑切向分力：

$$\mathrm{d}W = k\frac{\sin\theta}{r^3}r\mathrm{d}\theta = k\frac{\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta = k\frac{\sin\theta}{r_0^2}\mathrm{d}\theta$$

积分有：

$$W = \frac{k}{r_0^2}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

3.3.2 动能定理

动能定理是大家高中阶段熟练使用的定理，这部分非刚体的题目，与高中区别不大. 有关动能定理的证明和公式详见大物教材 P102，相关例题详见 3.3.4.

3.3.3 势能和保守力

保守力

如果物体在一个力的作用下，从一个位置移动到另一个位置时，这个力所做的功与路径无关，只与物体的始末位置有关，那么这个力就是保守力. 即保守力做功的大小仅取决于物体的起点和终点，而与物体所经过的具体路径无关.

保守力有以下几个显著地特征：

- **路径无关性**：保守力做功与路径无关，只与物体的初始位置和最终位置有关.

- **存在与之对应的势能函数**：对于保守力，存在一个势能函数 $U(\vec{r})$，使得保守力可以表示为势能函数的负梯度：

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$$

其中，∇ 是梯度算子，表示势能函数 U 在空间中的变化率.

- **机械能守恒**：在只有保守力作用的系统中，系统的总机械能（动能和势能之和）保持不变. 这称为机械能守恒定律.

根据以上定义和特征，我们可以发现，重力、万有引力、弹力、库仑力等都是保守力.

势能

势能是由于物体在保守力场中的位置而具有的能量. 它与物体的位置有关，与物体的运动状态无关. 保守力做功是势能改变的原因.

势能有如下几点特征：

- **保守力做功对应势能的减小**：势能的变化与保守力做功成负相关. 当保守力对物体做正功时，势能减少；当保守力对物体做负功时，势能增加.
- **势能的相对性**：势能的绝对值通常没有物理意义，因为势能的变化说明保守力做功，因此只有势能的变化才有意义. 为了便于描述势能的大小，大部分情况下，势能的绝对值需要选择一个参考点（零势能点）来定义.

下面，我们推导几个经典的势能，推导过程中我们不使用大物书 P115 页给出的公式：

$$E_p = \int_M^{M_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

而是使用“保守力做功等于势能减小”的思想，这更有利于读者体会势能的本质.

重力势能

重力势能是由于物体在地球表面附近引力场中而具有的能量. 我们可以通过计算重力在物体从参考点（通常选择地面或某个特定高度）移动到当前位置时所做的功来推导重力势能的表达式.

- 重力：$\vec{F}_{\text{重}} = -mg\hat{j}$
- 位移：$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}$

重力所做的功为：

$$W_{\text{重}} = \int_{\text{参考}}^{\text{最终}} \vec{F}_{\text{重}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\text{参考}}^{\text{最终}} (-mg\hat{j}) \cdot (\mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k})$$

由于重力只在 y 方向上做功，所以：

$$W_{\text{重}} = -mg \int_{\text{参考}}^{\text{最终}} \mathrm{d}y = -mg(y_{\text{最终}} - y_{\text{参考}})$$

选择参考点 $y_{\text{参考}} = 0$，则：

$$W_{\text{重}} = -mgy_{\text{最终}}$$

重力势能 $U_{重}$ 定义为重力从零势能点到最终位置做功的负值：

$$U_{重} = -W_{重} = mgy_{最终}$$

因此，重力势能（选取地面为零势能面）的表达式为：

$$U_{重} = mgh$$

弹性势能

弹性势能是由于物体的弹性形变而具有的能量. 我们可以通过计算弹簧力在物体从平衡位置移动到当前位置时所做的功来推导弹性势能的表达式.

- 弹簧力：$\vec{F}_{弹} = -kx\hat{i}$
- 位移：$d\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i}$

从平衡位置到 x 处，弹力所做的功为：

$$W_{弹} = \int_0^x \vec{F}_{弹} \cdot d\vec{r} = \int_0^x (-kx\hat{i}) \cdot (\mathrm{d}x\hat{i})$$

即：

$$W_{弹} = -k\int_0^x x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx^2$$

弹性势能 $U_{弹}$ 定义为弹簧力做功的负值：

$$U_{弹} = -W_{弹} = \frac{1}{2}kx^2$$

因此，弹性势能（以平衡位置为势能零点）的表达式为：

$$U_{弹} = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能

引力势能是由于物体在万有引力场中的位置而具有的能量. 我们可以通过计算万有引力在物体从参考点（通常选择无穷远处）移动到当前位置时所做的功来推导引力势能的表达式.

- 万有引力：$\vec{F}_{引} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$

  其中，G 是万有引力常数，M 是地球的质量，m 是物体的质量，r 是物体到地球中心的距离.
- 位移：$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\hat{r}$

将物体从零势能点（无穷远）处移动到 r 处，万有引力所做的功为：

$$W_{\vec{F}_{引}} = \int_\infty^r \vec{F}_{引} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_\infty^r \left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right) \cdot (\mathrm{d}r\,\hat{r})$$

即：

$$W_{\vec{F}_{引}} = -GMm\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{GMm}{r}$$

r 处的引力势能 $U_{引}$ 定义为万有引力从零势能点到 r 处做功的负值：

$$U_{引} = -W_{\vec{F}_{引}} = -\frac{GMm}{r}$$

因此，引力势能的表达式为：

$$U_{引} = -\frac{GMm}{r}$$

离心势能

离心势能是由于物体在旋转参考系中受到的离心力而具有的能量. 离心力是一个惯性力，其方向总是指向旋转轴的反方向. 我们可以通过计算离心力在物体从参考点移动到当前位置时所做的功来推导离心势能的表达式.

- 离心力：$\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$

  其中，m 是物体的质量，ω 是角速度，r 是物体到旋转轴的距离.
- 位移：$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\hat{r}$

规定转轴处为势能零点，离心力从零势能点到 r 处所做的功为：

$$W = \int_0^r \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^r (m\omega^2 r\hat{r})\cdot(\mathrm{d}r\hat{r})$$

$$W = m\omega^2\int_0^r r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

离心势能 U 定义为离心力做功的负值：

$$U = -W = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

因此，离心势能的表达式为：

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

势能和保守力的简单应用

在大物阶段，势能的用途有二：

1. 应用在机械能守恒定律中. 即在只有保守内力做功的系统中，系统的机械能守恒.
2. 已知势能场，利用公式：$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$，求出对应的保守力的表达式.

第一条大家在高中已经有很多的应用，这里给出第二条应用的一个例题：

例题 3.3 求匀质球壳对球壳内部任意一点的引力，其面密度为 σ，半径为 R

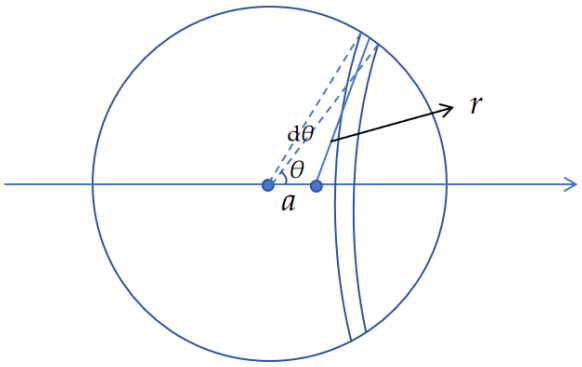
笔记

如果直接在计算球壳对内部一点的引力，需要分割球壳成为微元，计算每个微元在球内一点的引力，然后积分. 这个方法的麻烦之处在于，引力是个矢量，因此这个积分是个矢量积分，尽管利用对称性，可以将矢量积分化作标量积分，但最终的积分表达式是很难积出来的的（感兴趣的同学可以试试）

为了简化计算，我们可以计算球壳对球内某点的势能. 因为势能是标量，因此积分表达式里会少一项投影，积分就会简单许多. 得到势能后，再对其求负梯度，就可以得到引力.

解

将球壳按如图所示的方法取微元：



则每个微元在距离球心为 a 的位置产生的势能为：

$$\mathrm{d}E_p = -\frac{G\sigma}{r}\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$（一个半径为 $R\sin\theta$，高为 $R\mathrm{d}\theta$ 的环形的面积）

由勾股定理：

$$r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}$$

得到：

$$\mathrm{d}E_p = -\frac{G\sigma 2\pi R^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_p = \frac{G\sigma 2\pi R^2}{r}\mathrm{d}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_p = -\frac{G\sigma 2\pi R^2}{2Rar}\mathrm{d}r^2$$

积分得：

$$E_p = -\frac{2G\sigma\pi R}{a}\int_{R-a}^{R+a}\mathrm{d}r = -4\pi RG\sigma$$

可以发现：E_p= 常量，其梯度为零，因此球壳内部引力为零.

感兴趣的同学可以用相同的方法，推导一下球壳对球壳外一点产生的引力.

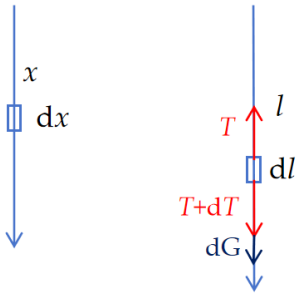
3.3.4 能动量综合问题

下面我们给出几道能动量的综合问题，来体会能量在力学题目中的一些具体应用：

例题 3.4 取一根劲度系数为 k、自由长度为 L、质量为 m 的均匀柱形弹性体. 现将其竖直悬挂，平衡后计算弹性体伸长量 ΔL 和内含弹性势能 E_p.

笔记 对于重弹簧问题，由于涉及重力，弹性体内弹性力并不处处相同，其与位置有关. 因此我们采取微元法来分析问题. 分析时，我们建立如图所示的两套坐标，一套是拉伸前的坐标，用 x 表示一段微元弹性体的位置，用 $\mathrm{d}x$ 表示微元弹性体的长度；一套是拉伸后的坐标，用 l 表

示同一段微元拉伸后的位置，用 $\mathrm{d}l$ 表示微元弹性体伸长后的长度. 那么对于每段微元，其伸长量就是 $\mathrm{d}l-\mathrm{d}x$，总的伸长量和弹性势能就可以通过积分求出了.



解

设原来无重力条件下，x 处长为 $\mathrm{d}x$ 的弹性体，在有重力条件下位于 l 处，长度变为了 $\mathrm{d}l$，则这段对应的劲度系数为：

$$k_1=\frac{L}{\mathrm{d}x}k$$

位于 x 处的弹性微元所受拉力为：

$$T=(L-x)\frac{m}{L}g$$

那么，每个弹性体的伸长量就可以表示为：

$$\mathrm{d}l-\mathrm{d}x=\frac{T}{k_1}=\frac{L-x}{Lk}\cdot\frac{m}{L}g\cdot\mathrm{d}x$$

得到每段微元对应弹性势能为：

$$\mathrm{d}E_{p2}=\frac{1}{2}k_1\cdot(\mathrm{d}l-\mathrm{d}x)^2$$

总伸长量：

$$\Delta L=\int\mathrm{d}l-\mathrm{d}x=\int_0^L\frac{(L-x)mg}{L^2k}\mathrm{d}x$$

解得：

$$\Delta L=\frac{mg}{2k}$$

对每个微元的势能进行积分：

$$E_p=\int\mathrm{d}E_p=\int_0^L\frac{m^2g^2(L-x)^2}{2kL^3}\mathrm{d}x$$

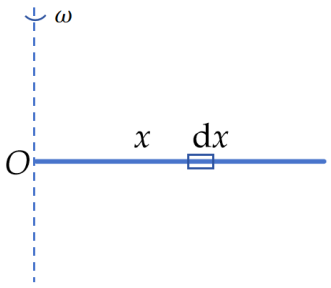
得到：

$$E_p=\frac{m^2g^2}{6k}$$

例题 3.5 求一个匀质杆绕一端以恒定角速度 ω 旋转时的动能，已知其长度为 l，质量为 m.

笔记 本题其实属于刚体问题，使用刚体的动能公式可以很快得出结论. 在这里我们使用微元法，将匀质杆分割成无数个微元，对每个微元的动能进行积分得到总动能.

解



取位于 x 处，长为 $\mathrm{d}x$ 的微元：

则：

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}x}{l}\cdot(\omega x)^2$$

积分：

$$\int \mathrm{d}E_k = \int_0^l \frac{1}{2}m\frac{\omega^2 x^2}{l}\mathrm{d}x$$

得到：

$$E_p = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

例题 3.6 三大宇宙速度的推导

解

1. 第一宇宙速度（环绕速度）——物体在地面附近绕地球做匀速圆周运动的最小发射速度.

   万有引力提供物体匀速圆周运动所需向心力：

   $$G\frac{M_{地}m}{r_{地}^2} = m\frac{v_1^2}{r_{地}}$$

   从而得到：$v_1 = \sqrt{\dfrac{GM_{地}}{r_{地}}}$，根据黄金代换：$GM_{地} = gr_{地}^2$，

   解得：

   $$v_1 = \sqrt{gr_{地}} = 7.9\text{km/s}$$

2. 第二宇宙速度（逃逸速度）——物体挣脱地球引力束缚，离开地球的最小发射速度.

   首先，两物体间的万有引力势能大小为：

   $$E_p = -\frac{GM_{地}m}{r}$$

   当物体挣脱地球引力飞向距地球无穷远处时，物体动能和势能都为 0，根据机械能守恒定理，在地球上发射时动能和引力势能之和也应该为 0，即 $E_p + E_k = 0$：

   $$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_{地}m}{r_{地}} = 0$$

   得到：

   $$v_2 = \sqrt{\frac{GM_{地}}{r_{地}}} = \sqrt{2gr_{地}} = \sqrt{2}v_1 = 11.2\text{km/s}$$

3. 第三宇宙速度——物体挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系以外空间的最小发射速度.

首先，我们发射卫星时，可以利用地球的公转速度，因此，先求解地球绕太阳的公转速度，即：

$$G\frac{M_{日}M_{地}}{r_{日地}}=M_{地}\frac{v_{公}^2}{r_{日地}}$$

然后，我们不考虑地球影响（或假设地球不存在），以太阳为参考系，那么在地球附近的物体具有的动能与势能之和为：

$$E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GM_{日}m}{r_{日地}}$$

若该物体能挣脱太阳引力，则应该满足 $E_k+E_p=0$，即：

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GM_{日}m}{r_{日地}}=0$$

解得：

$$v_0=\sqrt{\frac{GM_{日}}{r_{日地}}}=\sqrt{2}v_{公}=42.2\text{km/s}$$

注意：前面我们已经发现逃逸速度是环绕速度的根号 2 倍了. 因此 v_0 相当于地球逃逸太阳的速度.

现在我们最大程度地利用地球的环绕速度，发射一个与地球公转速度方向相同的卫星，此时的卫星，在脱离地球引力范围后的最小速度应为：

$$v_0'=v_0-v_{公}=42.2-29.8=12.4\text{km/s}$$

为了使卫星在脱离地球引力后，速度能够达到 v_0'，发射速度 v_3 需要满足：

$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{GM_{地}}{r_{地}}+\frac{1}{2}mv_0'^2$$

联立：

$$\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{GM_{地}}{r_{地}}=0$$

可得：

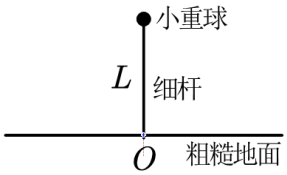
$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv_0'^2$$

简单地说，发射动能相当于卫星克服地球引力所需的动能加上卫星逃逸太阳系的动能.

最终解得：

$$v_3=\sqrt{v_2^2+v_0'^2}=\sqrt{11.2^2+12.4^2}=16.7\text{km/s}$$

例题 3.7 如图所示，长为 L 的细杆顶端固定一小重球，竖直倒置在粗糙的水平地面上. 小球处于不稳定的平衡状态，稍有扰动，小球将从静止开始向下跌落. 假设细杆很轻，其质量可略. 试求小球碰地时速度的水平分量和竖直分量.



笔记 因地面粗糙，小球下跌过程的最初阶段可认为细杆下端 O 点与地面之间无相对滑动，小球将沿着以 O 点为圆心、以 L 为半径的圆周下落，小球所受重力沿细杆的分力以及细杆对小球的支持力提供了小球作圆周运动所需的向心力.N 的大小随小球位置变化，当 $N=0$ 时，细杆下端将脱离地面，小球不再受地面的约束.

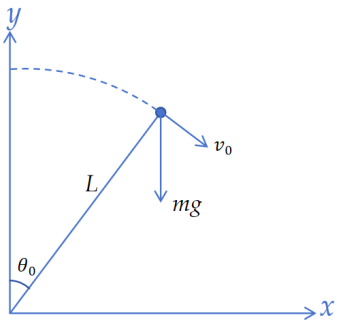
设细杆脱离地面时，小球的速度为 v_0，小球脱离约束后，将以 v_0 为初速作抛体运动. 显然，小球碰地时速度的水平分量即为 v_0 的水平分量. 小球碰地速度 v 的大小则可由机械能守恒定律求得. 由 v 及其水平分量，v 的竖直分量可求.

解

设小球质量为 m，当小球以细杆下端 O 点为圆心、以杆长 L 为半径作圆周运动时，其位置用细杆与竖直 y 轴的夹角 θ 表示，相应的速度为 v，小球受重力 mg 及细杆支持力 N，由牛顿第二定律，有

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{L}$$

设当 $\theta=\theta_0, v=v_0$ 时，细杆脱离地面，小球不受约束，如下图所示：



则此时：

$$N=0$$

故有：

$$mg\cos\theta_0 = \frac{mv_0^2}{L}$$

取小球与地球为物体系，在上述圆周运动过程中，系统机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1-\cos\theta_0)$$

由以上两式，解出：

$$\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

及：

$$v_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

小球脱离约束后，以 v_0 为初速作抛体运动，v_0 的 x 和 y 分量（即水平和竖直分量）为：

$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

$$v_{0y} = -v_0 \sin\theta_0 = -\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

设小球碰地时的速度为 v，其大小可由机械能守恒定律求出. 仍取小球与地球为物体系，取小球从静止开始运动为初态，取小球碰地时为终态，则有：

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2$$

即：

$$v = \sqrt{2gL}$$

小球作抛体运动时，其速度的水平分量不变，故 v 的水平分量为：

$$v_x = v_{0x} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

v 的竖直分量的大小为：

$$|v_y| = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \sqrt{2gL - \frac{8}{27}gL} = \sqrt{\frac{46}{27}gL}$$

例题 3.8 地面上静止放置着质量为 M 的平板车，车上有 N 个人，每个人的质量均为 m. 每个人以相同的相对速度 u（相对跳后的车速）沿水平方向从车后跳离平板车. 忽略一切阻力. 试问，在 N 个人同时跳出和逐个跳出两种情况下，平板车在哪种情况下获得的动能大.

笔记 取平板车和 N 人作为质点系，水平方向的动量应守恒，系统在跳前的总动量为零，跳后系统的总动量仍应为零. 利用动量守恒处理类似本题的问题时，必须明确相对速度的含义. 在本题中，相对速度已指明为跳后的相对速度. 明确这点后，利用动量守恒分别处理 N 人同时跳出与逐个跳出两种情况，不难求出最后的车速.

解

N 个人同时跳出. 取车和 N 人组成质点系，跳出前后物体系动量守恒. 因跳前，车和 N 人均静止，动量为零. 跳后，设车速为 v，则因 N 人同时以相对速度 u 跳出，故 N 人的绝对速度为 $(v+u)$，于是有：

$$Mv + Nm(v+u) = 0$$

解出：

$$v = -\frac{N}{M+Nm}mu \tag{1}$$

负号表示 v 与 u 反向.

N 个人逐个跳出时，取车和 N 人组成质点系，设第一人跳出后车速为 v_1，由动量守恒，有：

$$[M + (N-1)m]v_1 + m(v_1 + u) = 0$$

解出：

$$v_1 = -\frac{m}{M+Nm}u$$

负号表示 v_1 与 u 反向.

再取车和 $N-1$ 个人组成质点系，设第二人跳出后车速为 v_2，由动量守恒，有：

$$[M+(N-1)m]v_1=[M+(N-2)m]v_2+m(v_2+u)$$

把 v_1 代入，解出：

$$v_2=-mu\left[\frac{1}{M+Nm}+\frac{1}{M+(N-1)m}\right]$$

依次类推，逐个跳出，直至第 N 人跳出后，车速为：

$$v_N=-mu\left[\frac{1}{M+Nm}+\frac{1}{M+(N-1)m}+\frac{1}{M+(N-2)m}+\cdots+\frac{1}{M+m}\right]$$

式中的各项逐项增大，共 N 项，故：

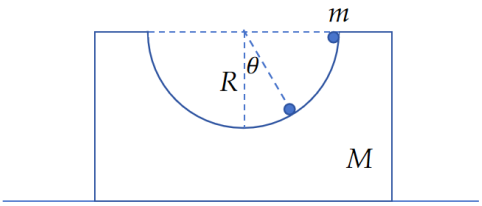
$$v_N>mu\frac{N}{M+Nm} \tag{2}$$

由 (1)、(2) 式：

$$|v_N|>|v|$$

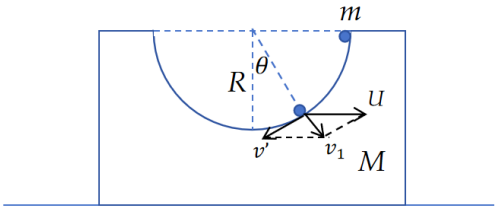
因此，N 个人逐个跳出时车的速度、动量、动能大于 N 个人同时跳出时车的速度、动量、动能.

例题 3.9 如图所示，地面上有一个半圆凹槽的滑块，质量为 M，凹槽半径为 R，质量为 m 的小球从最高点静止向下滑，不计所有摩擦，求 m 的绝对速度随 θ 的变化表达式，求到达最低点时小球对滑块的压力.



解

1. 设 m 滑动到 θ 时，M 速度为 U，m 相对 M 速度 v'，m 的绝对速度 v_1 可由速度叠加关系得到.



则 m 的绝对速度 v_1 可表示为：

$$v_1=\sqrt{U^2+v'^2-2Uv'\cos\theta} \tag{1}$$

m 水平速度 v_x 可表示为：

$$v_x=U-v'\cos\theta\quad(\text{向右为正方向}) \tag{2}$$

整个体系能量守恒：

$$mgR\cos\theta = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{3}$$

水平动量守恒：

$$mv_x + MU = 0 \tag{4}$$

联立 (1)，(2)，(3)，(4) 求解，得：

$$U = \sqrt{\frac{2m^2\cos^3\theta gR}{(m+M)^2 - m(M+m)\cos^2\theta}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{[(m+M)^2 - m(2M+m)\cos^2\theta]2\cos\theta gR}{(m+M)^2 - m(M+m)\cos^2\theta}}$$

$$v' = \sqrt{\frac{2(M+m)^2\cos\theta gR}{(m+M)^2 - m(M+m)\cos^2\theta}}$$

2. 当 m 到达最低点时，取 M 为参考系，因 M 的加速度为零，故 m 不受惯性力，只受重力 mg 和支持力 N，于是有：

$$N - mg = \frac{mv'^2}{R}$$

式中的 v' 是 $\theta = 0$ 处 m 相对 M 的速度. 由上述 $v'(\theta)$ 表达式，在 $\theta = 0$ 时，有：

$$v' = \sqrt{\frac{m+M}{M}\cdot 2gR}$$

代入，得出 m 在最低点处（即 $\theta = 0$ 处）所受支持力为：

$$N = \left(\frac{2m+3M}{M}\right)mg$$

由牛顿第三定律定律可得，小球 m 在最低点时给木块 M 的压力大小等于 N，但方向竖直向下.

3.3.5 质点系动能定理和机械能守恒

我们在资料中略去了质点的动能定理和机械能守恒的相关内容，直接讨论质点系的相关内容，其中有关质点系内力做功的问题是易错易混点，请同学们仔细阅读理解推导过程.

1. 质点系的动能定理推导

(1) 质点系的总动能

质点系的总动能 E_k 是各质点动能的总和：

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

其中，m_i 和 $\vec{v}_i$ 分别是第 i 个质点的质量和速度.

(2) 动能的微分

对总动能求时间导数：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}$$

根据牛顿第二定律，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_i = \dfrac{\vec{F}_i}{m_i}$，代入得：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i$$

其中，$\vec{F}_i$ 是作用在第 i 个质点上的总力.

(3) 力的分解

总力 $\vec{F}_i$，可分为外力 $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ 和内力 $\vec{F}_{ij}$：

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

这就是质点系的动能定理，即总动能的变化等于外力做功和内力做功的总和.

（也可以把 $\mathrm{d}t$ 乘到等式右边，就得到了元功的形式的动能定理）

2. 机械能守恒的推导

(1) 内力做功与势能的关系

对于保守内力，内力做功可以表示为势能的变化. 考虑质点 i 和质点 j 之间的内力，其做功为：

$$\mathrm{d}W_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j$$

根据牛顿第三定律，$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$，因此：

$$\mathrm{d}W_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j)$$

由于 $\vec{F}_{ij}$ 是保守力，可以表示为势能的负梯度：

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla E_p$$

因此，内力做功可以写成：

$$\mathrm{d}W_{ij} = -\nabla E_p \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j) = -\mathrm{d}E_p$$

即内力做功等于势能的减少.

(2) 总机械能的定义

质点系的总机械能 E 是动能 E_k 和势能 E_p 之和：

$$E = E_k + E_p$$

其中：

- 动能 $E_k = \sum_i \dfrac{1}{2} m_i v_i^2$;

- 势能 $E_p = \sum_{i<j} E_{p,ij}$，表示所有质点对之间的势能总和.

(3) 机械能守恒的推导

根据质点系的动能定理，总动能的变化等于外力做功和内力做功之和：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i<j} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

对于保守内力，内力做功可以表示为势能的变化：

$$\sum_{i<j} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$$

因此，动能的变化可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}} - \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$$

将势能项移到左边：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

其中，$E = E_k + E_p$ 是总机械能.

(4) 机械能守恒的条件

如果系统不受外力作用，或者外力做功为零（例如外力方向与位移方向垂直），则：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

即总机械能 E 保持不变：

$$E = E_k + E_p = \text{常数}$$

结论

质点系动能定理：质点系总动能的变化等于外力做功和内力做功的总和：

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i<j} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

机械能守恒：当内力为保守力时，内力做功可以完全转化为势能的变化，总机械能 $E = E_k + E_p$ 的变化仅由外力做功决定. 如果外力不做功（或外力为零），则总机械能守恒：

$$E = E_k + E_p = \text{常数}$$

这部分的例题，可以参考大物教材 P110-P113 的几道例题.

3.4 真题演绎

练习 3.1 关于质点系内各质点间相互作用的内力作功问题，以下说法中正确的是：(　　)

A. 一对内力所作的功之和一定为零.

B. 一对内力所作的功之和一定不为零.

C. 一对内力所作的功之和是否为零，取决于参考系的选择.

D. 一对内力所作的功之和一般不为零，但不排除为零的情况.

解 **D**

✍ **练习 3.2** 质点在二维引力场中运动，该引力场相对应的势能 $U(x,y)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$，$k$ 为常数. 则质点所受的力为 (用直角坐标以矢量形式表示) $\vec{F}=$

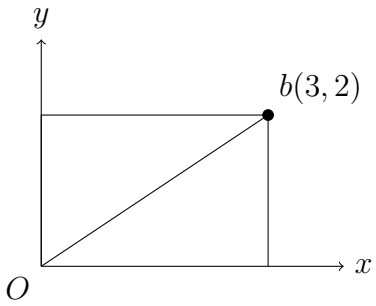
解 $\vec{F}=-kx\hat{i}-ky\hat{j}$

对引力场中的势能求负梯度即可.

✍ **练习 3.3** 已知地球的半径为 R，质量为 M，万有引力常量为 G. 现有一质量为 m 的物体，在离地面高度为 $2R$ 处，以地球和物体为系统，若取地面为势能零点，则系统的引力势能为:

解 $U=\int_R^{3R}\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{2GMm}{3R}$

✍ **练习 3.4** 质点在力 $F=2y^2\hat{i}+3x\hat{j}$ 作用下在 xOy 平面内运动，F 的单位为 N，xy 的单位为 m. 则质点沿图示从原点 O 沿直线 Ob 运动到 $b(3,2)$ 的过程中 $\vec{F}$ 力所做的功为:



解 **17J**

由于该直线方程为 $y=\frac{2}{3}x$

所以 $\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}W=2y^2\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y=2y^2\frac{3}{2}\mathrm{d}y+3x\frac{2}{3}\mathrm{d}x$

积分可以得到最终 $W=17J$

✍ **练习 3.5** 一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力 $\vec{F}=F_0(x\hat{i}+y\hat{j})$ 作用在质点上，则该质点从坐标原点运动到 $(0,2R)$ 位置的过程中，力 $\vec{F}$ 对它所做的功为:

A. F_0R^2

B. $2F_0R^2$

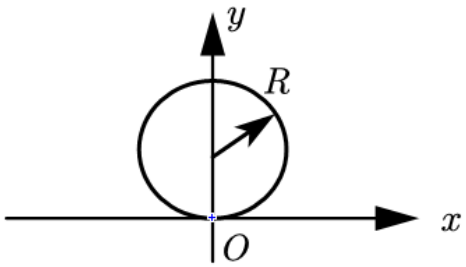
C. $3F_0R^2$

D. $4F_0R^2$

解 **B**

$$W=\int_0^{2R}F_0y\,\mathrm{d}y=F_0\frac{(2R)^2}{2}=2F_0R^2$$

✍ **练习 3.6** 一端悬挂在天花板上的铅垂橡皮筋，其张力的大小按 $f=ax^2$ 变化，a 是一个正的常量，下端不挂重物时作为坐标原点，橡皮筋质量不计. 今在其下端悬挂一质量为 m 的物体，在 $x=0$ 处自静止释放，则物体能达到的最大位移为 ()



A. $\sqrt{\dfrac{mg}{a}}$

B. $\sqrt{\dfrac{3mg}{a}}$

C. $\dfrac{2mg}{a}$

D. $\dfrac{3mg}{a}$

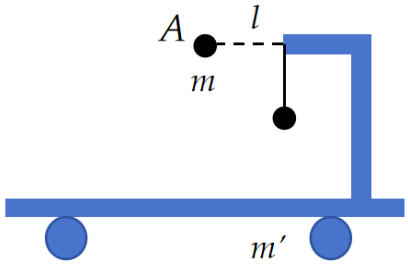
解 **B**

写物体的动能定理方程：$\displaystyle\int_0^{x_0} ax^2\mathrm{d}x - mgx_0 = 0$

可得：$mgx_0 - \dfrac{1}{3}a{x_0}^3 = 0$

计算得到最大位移 x_0.

练习 3.7 静止于光滑水平面上的一质量为 m' 的车上悬挂一长为 l，质量为 m 的小球，开始时，摆线水平，摆球静止于 A，后突然放手. 试求：当摆球运动到摆线呈铅直位置的瞬间，摆球相对地面的速度大小. 摆线不可伸长.



解

由能量守恒得：$mgl = \dfrac{1}{2}m{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}m'{v_2}^2$

由动量守恒得：$mv_1 = m'v_2$

解得：$v_1 = \sqrt{\dfrac{2m'gl}{m'+m}}$

练习 3.8 双原子分子中，两原子之间的相互作用力所对应的势能函数可表示为

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

其中 a 和 b 是两已知的正系数，x 是两原子间的距离. 求：

1. 两原子达到稳定平衡时的距离 x_m；

2. 两原子的相互作用力函数 $F(x)$；
3. 将这分子拆散为两个孤立原子所需的最小能量 E_d（即将两个原子由稳定平衡时的间距分开到相隔无穷远所需能量）.

解

1. 势能取极值时，两原子达到平衡位置：$U'(x)=-\dfrac{12a}{x^{13}}+\dfrac{6b}{x^7}=0\Rightarrow x_m=\left(\dfrac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$
2. 对势能取负梯度，可以计算得到力：$F(x)=-\dfrac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{12a}{x^{13}}-\dfrac{6b}{x^7}$
3. 求由平衡位置到无穷远，力所做的功即可得到所需能量：$E_d=-\displaystyle\int_{x_m}^{\infty}F\,\mathrm{d}x=-\int_{x_m}^{\infty}\left(\dfrac{12a}{x^{13}}-\dfrac{6b}{x^7}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{b^2}{4a}$

✍ **练习 3.9** 质量为 M、长为 L 的木块，放在水平地面上. 今有一质量为 m 的子弹以水平初速度 v_0 射入木块，问：

1. 当木块固定在地面上时，子弹射入木块的水平距离为 $L/2$. 欲使子弹水平射穿木块（刚好射穿），子弹的速度 v_1 最小将是多少?
2. 木块不固定，且地面是光滑的. 当子弹仍以速度 v_0 水平射入木块，相对木块进入的深度（木块对子弹的阻力视为不变）是多少?
3. 在（2）中，从子弹开始射入到子弹与木块无相对运动时，木块移动的距离是多少?

解

1. 设木块对子弹的阻力为 f，
   $-f\dfrac{L}{2}=0-\dfrac{1}{2}mv_0^2,\quad -fL=0-\dfrac{1}{2}mv_1^2$
   解得 $f=\dfrac{mv_0^2}{L}$，$v_1=\sqrt{2}v_0$
2. 由动量守恒得：$mv_0=(M+m)v\Rightarrow v=\dfrac{m_0v_0}{M+m}$
   设子弹射入木块的深度为 s，则有 $-fs=\dfrac{1}{2}(M+m)v^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$
   解得: $s=\dfrac{ML}{2(M+m)}$
3. 对木块写动能定理方程：$fs'=\dfrac{1}{2}Mv^2-0,\quad s'=\dfrac{Mm}{2(M+m)^2}L$

✍ **练习 3.10** 一质量为 2g 的子弹，在枪筒中前进时（沿 x 正方向）所受合力为 $F=400-\dfrac{8000}{9}x$(N)，其中 x 以 m 为单位，设开枪时子弹在 $x=0$ 处，已知子弹射出枪口的速度为 300m/s，则枪筒的长度为（　　）

A. 0.17m
B. 0.35m
C. 0.45m
D. 0.62m

解 C

对子弹写动能定理方程：$\displaystyle\int_0^{x_0}F\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2$
解得 $x_0=0.45m$

练习 3.11 一特殊弹簧，弹性恢复力为 $F=-kx^3$，k 为劲度系数，x 为形变量. 现将弹簧水平放置于一光滑的平面上，一端固定，一端与一质量为 m 的滑块相连，弹簧处于自然伸展状态，沿弹簧长度收缩方向给滑块一冲量，使其获得一速度 v，则弹簧被压缩的最大长度为（　　）

A. $\left(\dfrac{4mv}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$

B. $\left(\dfrac{2mv^2}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$

C. $\sqrt{\dfrac{m}{k}}v$

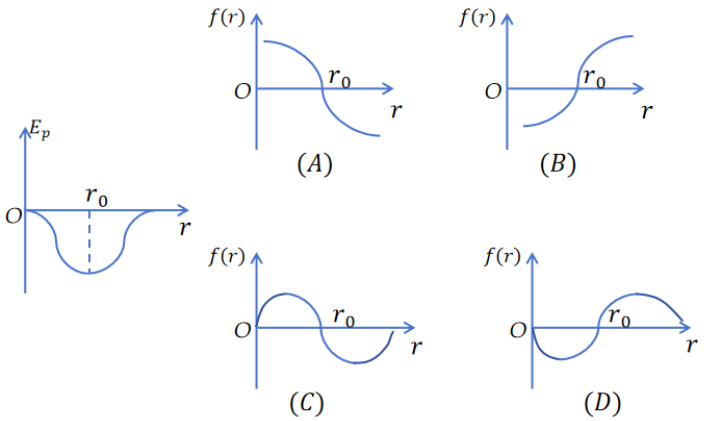
D. $\sqrt{\dfrac{k}{m}}v$

解 B

对滑块写动能定理方程：$-\displaystyle\int_0^{x_0}F\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2$

解得：$x_0=\left(\dfrac{2mv^2}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$

练习 3.12 一个两体系统的势能（E_p）曲线如图所示，图中 r 是两体之间的距离，问 A、B、C、D 四个图中哪一个正确地表示了该系统的内力（　　）.



解 C

对势能求负梯度得到力.

练习 3.13 对质点系有以下几种说法：

1. 质点系总动量的改变与内力无关；
2. 质点系总动能的改变与内力无关；
3. 质点系机械能的改变与保守内力无关；
4. 质点系总势能的改变与保守内力无关.

在上述说法中（　　）.

A. 只有（1）是正确的

B.（1）和（3）是正确的

C.（1）和（4）是正确的

D.（2）和（3）是正确的

解 B

根据质点系的动量定理：质点系所受合外力的冲量等于质点系总动量的变化量，与内力无关

爆炸过程中，内力对系统做功，会使系统的动能增加，所以质点系总动能的改变与内力有关.

因为保守内力做功只会使系统内的动能和势能相互转化，不会改变系统的机械能总量，所以质点系机械能的改变与保守内力无关.

根据保守力做功与势能变化的关系，保守内力做功会导致质点系总势能的改变，所以质点系总势能的改变与保守内力有关.

练习 3.14 用铁锤把质量很小的钉子敲入木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比. 铁锤敲打第一次时，能把钉子敲入 1.00cm. 铁锤第二次敲打的速度与第一次完全相同，那么第二次敲入的深度为（　）.

A. 0.41cm

B. 0.50cm

C. 0.73cm

D. 1.00cm

解 A

设阻力 $F=-kh$，其中 h 为进入木板的深度，第一次敲打: $0-\dfrac{1}{2}mv^2=\displaystyle\int_0^{0.01}-kh\,\mathrm{d}h$,

第二次敲打:$0-\dfrac{1}{2}mv^2=\displaystyle\int_{0.01}^{h_2}-kh\,\mathrm{d}h$, $\quad\therefore h_2=0.41\mathrm{cm}$

3.5 知识拓展

3.5.1 能量法判断平衡类型

在力学系统中，平衡类型可以根据系统在平衡位置附近的行为分为三类：**稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡**.

能量在物理（尤其是理论物理）中的另一个重要应用就是判断平衡的稳定性，其基本思想可以理解为：一个平衡的系统，其体系能量一定是达到了极小值，在受到一个微扰后，体系能量升高，系统自发地回到原来的平衡状态. 反之，如果体系能量达到了极大值，则是不稳定的.

因此，我们可以通过列出体系的势能，计算微扰后势能的变化，再判断势能变化的正负，就能判断出平衡的稳定性，这在静力学中常常需要使用复杂的受力分析来完成.

下面，我们来分别介绍三种平衡和判断它们的方法.

稳定平衡

当系统处于稳定平衡时，任何微小扰动都会使系统产生一个恢复力，使其回到平衡位置. 其势能特征如下：

- 势能 E_p 在平衡位置 q_0 处取得极小值.
- 势能的二阶导数满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

示例

- 单摆：在 $\theta = 0$ 处，势能取得极小值，系统处于稳定平衡.
- 弹簧振子：在 $x = 0$ 处，势能取得极小值，系统处于稳定平衡.

不稳定平衡

当系统处于不稳定平衡时，任何微小扰动都会使系统远离平衡位置. 其势能特征如下：

- 势能 E_p 在平衡位置 q_0 处取得极大值.
- 势能的二阶导数满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} < 0$$

示例

- 单摆：在 $\theta = \pi$ 处，势能取得极大值，系统处于不稳定平衡.
- 倒立的圆锥：圆锥倒立时，任何微小扰动都会使其倒下.

随遇平衡

当系统处于随遇平衡时，任何微小扰动都不会使系统产生恢复力或偏离力，系统可以在新的位置保持平衡.

其势能特征如下：

- 势能 E_p 在平衡位置 q_0 附近为常数.
- 势能的二阶导数满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} = 0$$

且更高阶导数也为零.

示例

- **水平面上的小球**：小球在水平面上任意位置都可以保持平衡，势能不变.
- **无摩擦的滑块**：滑块在水平轨道上任意位置都可以保持平衡.

平衡类型	势能特征	物理行为
稳定平衡	势能取得极小值, $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}>0$	系统受扰动后回到平衡位置
不稳定平衡	势能取得极大值, $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}<0$	系统受扰动后远离平衡位置
随遇平衡	势能为常数, $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}=0$	系统受扰动后在新位置保持平衡

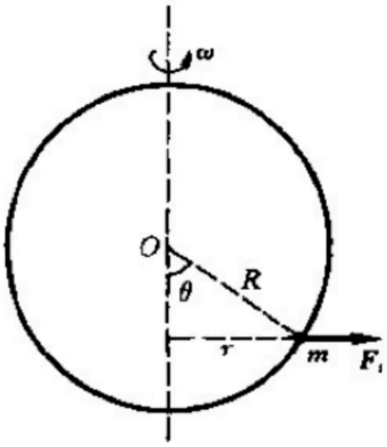
总结对比

其实，对能量法判断平衡问题有一个直观的理解：

- **稳定平衡**：势能曲面在平衡点处像一个“碗”，系统倾向于停留在碗底.
- **不稳定平衡**：势能曲面在平衡点处像一个“山顶”，系统倾向于从山顶滑落.
- **随遇平衡**：势能曲面在平衡点处是“平坦的”，系统可以在任意位置保持平衡.

下面，我们通过一道例题，来详细看看能量法是怎么应用到静力学中的.

例题 3.10 如图，半径为 R 的光滑圆环绕竖直的直径轴以角速度 ω 旋转. 一质量为 m 的小球串在圆环上，可沿环无摩擦地滑动. 试求小球的平衡位置，并讨论平衡的稳定性.



笔记 取圆环参考系，小球受重力，竖直向下；受环作用力，指向或背向环中心，与小球的运动方向垂直（图中重力与环作用力均未画出）；以及惯性离心力 F_i，沿水平方向，与竖直转轴垂直向外. 从能量角度看，小球的能量包括动能 E_k 与势能 E_p 两者. 当小球沿环运动时，环作用力不作功，但重力和惯性离心力都对小球作功，前者可表为重力势能 $E_{p,\text{重}}$ 的减少，后者则可表为离心势能 $E_{p,\text{离}}$ 的减少. 取 $\theta=0$ 的位置为势能 $E_{p,\text{重}}$ 与 $E_{p,\text{离}}$ 的零点，即可写出小球在任意位置 θ 时的 $E_{p,\text{重}}$ 与 $E_{p,\text{离}}$ 的表达式.$E_{p,\text{重}}$ 与 $E_{p,\text{离}}$ 之和通常称为小球的有效势能 $E_{p,\text{eff}}$，平衡条件是 $E_{p,\text{eff}}$ 为极值，即 $\dfrac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}\theta}=0$. 由此即可确定小球可能的平衡位置. 再根据二阶导的正负，即可判断各个平衡位置的稳定性.

解

取圆环参考系，小球的位置用 θ 表示. 小球受重力 mg，惯性离心力 F_i（还有环作用力，它

与小球运动方向垂直，不作功）. 其中 F_i 为

$$F_i = m\omega^2 = mR\omega^2 \sin\theta$$

取 $\theta = 0$ 的位置为重力势能 $E_{p,\text{重}}$ 和离心势能 $E_{p,\text{离}}$ 的零点，则小球在任意 θ 位置时 $E_{p,\text{重}}$ 和 $E_{p,\text{离}}$ 的表达式为：

$$E_{p,\text{重}} = mgR(1-\cos\theta)$$

$$E_{p,\text{离}} = -\int_0^\theta F_i \cos\theta \cdot R\,\mathrm{d}\theta = -mR^2\omega^2 \int_0^\theta \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

小球的有效势能为：

$$E_{p,\text{eff}} = E_{p,\text{重}} + E_{p,\text{离}} = mgR(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta \tag{1}$$

小球的总机械能为：

$$E = E_k + E_{p,\text{eff}}$$

式中 E_k 为小球动能.

小球平衡位置相应的 $E_{p,\text{eff}}$ 为极值，即应满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_{p,\text{eff}} = 0$$

把 (1) 式代入，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_{p,\text{eff}} = mgR\sin\theta - mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

即：

$$\sin\theta(g - R\omega^2\cos\theta) = 0$$

上述方程有三个解，即小球有三种可能的平衡位置，为：

$$\theta = 0, \pi, \arccos\frac{g}{R\omega^2}$$

前两个解 $\theta = 0$ 和 π 都与 ω 无关，即在任意角速度 ω 时都是平衡位置，第三个解只在 $\cos\theta = \dfrac{g}{R\omega^2} < 1$ 时才成立，即对角速度 ω 有所限制.

为了讨论各平衡位置的稳定性，需计算 $E_{p,\text{eff}}$ 对 θ 的二阶导数. 由 (1) 式，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}} = mgR\cos\theta - mR^2\omega^2\cos^2\theta - mR^2\left(\frac{g}{R}\cos\theta - \omega^2\cos^2\theta\right)$$

对于平衡位置 $\theta = 0$：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}} = mR^2\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)$$

当 $\omega < \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}} > 0$，$E_{p,\text{eff}}$ 为极小值，属稳定平衡；当 $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}} < 0$，$E_{p,\text{eff}}$ 为极大值，属不稳定平衡；当 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ 时，看上去是随遇平衡，但由于此时势能的四阶导小于零，因此属于稳定平衡. 可见，$\theta = 0$ 位置的平衡是否稳定，与角速度 ω 的值有关.

对于平衡位置 $\theta = \pi$：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}} = -mR^2\left(\frac{g}{R} + \omega^2\right) < 0$$

$E_{p,\text{eff}}$ 为极大值，故 $\theta=\pi$ 位置的平衡总是不稳定平衡，与角速度 ω 无关.

对于平衡位置 $\theta=\arccos\dfrac{g}{R\omega^2}$：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}}=\frac{m}{\omega^2}(R^2\omega^4-g^2)$$

因 $\cos\theta=\dfrac{g}{R\omega^2}<1$，故 $R^2\omega^4-g^2>0$，即：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{p,\text{eff}}>0$$

$E_{p,\text{eff}}$ 为极小值，属稳定平衡. 可见，只要存在平衡位置 $\theta=\arccos\dfrac{g}{R\omega^2}$（要求 $\dfrac{g}{R\omega^2}<1$），则平衡总是稳定的，与角速度 ω 无关.

第 4 章 刚体力学

4.1 引言

刚体运动学和刚体动力学是大学物理中一个核心主题. 由于高中阶段不涉及刚体问题，而考试中刚体问题又常常与其他内容相结合，并且占主要部分，因此刚体是同学们学习大物的重难点. 本章将引导同学们了解刚体的基础知识，包括自由度、力矩、转动惯量、角动量、转动定律、刚体动能等关键概念. 通过这些内容的学习，希望同学们能够掌握描述刚体运动的基本工具和方法，学会解决刚体综合问题. 此外，在扩展部分中，我们还讲介绍一个角动量的在理论力学中的重要应用——进动，为日后理论力学的学习打下坚实基础.

4.2 考情速递

刚体部分的考情分析如下：

1. 考察题目多，占比大，需要引起重视.
2. 概念题多，主要是关于刚体机械能守恒、角动量守恒的判断.
3. 计算题主要和机械能守恒结合考察，部分题目涉及受力分析和质心运动定理，总体难度中等.
4. 转动惯量基本不考察如何计算，会用即可.
5. 考察的题型变化不大，模型有限，可以在考前多做题熟悉模型.

4.3 知识剖析

4.3.1 概述

刚体这一章节，说难很难，说简单也很简单. 大家在此前已经研究过质点运动和物体的平动了. 要想研究刚体运动和转动，就需要引入一些新的物理量，由此就带来了一些新的物理公式. 这些物理量和物理公式并不是空穴来风，它们都能在质点和平动的理论体系中找到自己对应的物理量和公式. 在深入学习本章内容之前，我们不妨先认识一下本章所有新引进的物理量和公式，并将它们与质点理论中的物理量和公式对应起来，这将有助于读者建立对刚体世界的第一印象.

物理量	质点、平动	刚体、转动
速度	线速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	质心速度 $\vec{v}_c$ 和角速度 $\vec{\omega}$
加速度	线加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	质心加速度 $\vec{a}_c$ 和角加速度 $\vec{\alpha}=\dfrac{d\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
惯性	质量 m，描述质点对平动的惯性.	转动惯量 I，描述刚体对转动的惯性.
力	$\vec{F}$	力 $\vec{F}$ 和力矩 $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$
动力学	$\vec{F}=m\vec{a}$	平动：$\vec{F}=M\vec{a}_c$；转动：$\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$
动量	动量 $\vec{p}=m\vec{v}$，描述质点的运动状态.	质心动量 $\vec{P}=M\vec{v}_c$ 和角动量 $\vec{L}=I\vec{\omega}$
守恒定律	合外力为零时动量守恒	合外力矩为零时角动量守恒
动能	动能 $T=\dfrac{1}{2}mv^2$	平动动能 + 转动动能 $T=\dfrac{1}{2}Mv_c^2+\dfrac{1}{2}I\omega^2$

从表格中读者可能已经注意到了，在刚体的学习中，有一个思想贯穿始终，那就是：

刚体 = 刚体质心的平动 + 刚体绕质心的转动

读者可以在后面的学习中反复体会这种思想.

4.3.2 刚体基本知识

自由度

刚体的自由度是指描述刚体在空间中位置和姿态所需要的独立参数的数量. 自由度的概念对于理解刚体的运动学和动力学至关重要.

对于一个三维空间中的刚体，它有 6 个自由度，具体如下：

1. 平移自由度（3 个）：
   - 沿 x 轴的平移
   - 沿 y 轴的平移
   - 沿 z 轴的平移

   这三个自由度描述了刚体在空间中的位置.
2. 旋转自由度（3 个）：
   - 绕 x 轴的旋转
   - 绕 y 轴的旋转
   - 绕 z 轴的旋转

   这三个自由度描述了刚体相对于空间坐标系的取向.

在实际应用中，刚体的自由度可能会受到约束条件的限制. 例如，如果一个刚体被固定在一个平面上，那么它的平移自由度可能会减少到 2 个（只能在平面上移动），而旋转自由度减少到 1 个（绕垂直于平面的轴旋转）. 理解自由度对于分析刚体的运动和设计机械系统都是非常重要的.

刚体的速度

对于刚体来说，其运动可以分解为：刚体质心的平动 + 绕质心的转动.（这里的质心也可以换为刚体上的任意一点，只是质心在分析大部分问题时较为方便）

下面，我们分别来讨论这两部分运动.

平动速度

平动速度是刚体整体沿着某一方向移动的速度. 如果我们考虑一个刚体在三维空间中的运动，可以将其平动速度表示为一个矢量 $\vec{v}$，其中 v_x、v_y 和 v_z 分别是刚体沿 x、y 和 z 轴方向的分速度. 因此，平动速度矢量可以表示为：

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

这里，$\hat{i}$、$\hat{j}$ 和 $\hat{k}$ 分别是沿 x、y 和 z 轴的单位矢量.

转动速度（角速度）

除了平动速度外，刚体还可能绕着某个轴旋转. 角速度描述了刚体旋转的快慢和旋转轴的方向. 角速度矢量 $\vec{\omega}$ 也是一个矢量，其大小表示旋转的速率，方向按照右手定则确定. 角速度矢量可以表示为：

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$$

其中，ω_x、ω_y 和 ω_z 分别是刚体绕 x、y 和 z 轴的旋转速率.

刚体上某点的速度

刚体上任意一点的速度可以通过平动速度和该点相对于刚体质心的旋转速度来计算. 如果 $\vec{v}_{cm}$ 是刚体质心的平动速度，$\vec{\omega}$ 是刚体的角速度，$\vec{r}$ 是从质心到该点的位置矢量，那么该点的速度 $\vec{v}$ 可以表示为：

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

这里，$\vec{\omega} \times \vec{r}$ 表示由于刚体旋转而产生的线速度分量.

总的来说，刚体的速度是一个综合了平移和旋转两个方面的矢量，它全面地描述了刚体在空间中的运动状态.

下面给出一个例题，简单体会一下刚体上的速度是如何计算的：

例题 4.1 有一个在地上纯滚动的圆环，圆心速度为 v，半径为 R，求环上 θ 处一点此时的速度.（θ 的零点对应圆心正下方，顺时针为正方向）

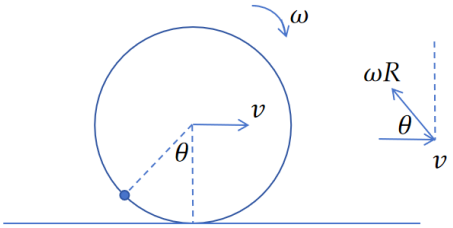
解

设圆环角速度为 ω，圆环纯滚，则 $v = \omega R$

速度叠加关系，得：

$$v_p = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2 - 2\omega v R \cdot \cos\theta}$$

$$= v\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$



4.3.3 力矩和冲量矩

力矩

力矩（也称为转矩或扭矩）是描述力对物体产生旋转效果的物理量. 力矩是矢量，具有大小和方向，是刚体动力学中的一个重要概念. 可以说，力矩在刚体动力学中的地位和力在质点动力学中的地位相当.

力矩 $\vec{\tau}$ 定义为力 $\vec{F}$ 和由旋转轴指向力的作用点的位置矢量 $\vec{r}$ 的向量积（叉乘）：

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

这里，$\vec{F}$ 是作用在物体上的力. 力矩的单位通常是牛顿米（Nm）.

力矩的大小可以通过以下公式计算：

$$\tau = rF\sin\theta$$

其中：

- τ 是力矩的大小，
- $r\sin\theta$ 是力的作用点到旋转轴的垂直距离 (力臂)，
- F 是力的大小，
- θ 是力 $\vec{F}$ 和 $\vec{r}$ 之间的夹角.

力矩的方向由右手定则确定：如果你的右手的四指从 $\vec{r}$（通过最短的路径）弯曲到 $\vec{F}$ 的方向，那么你的拇指指向的方向就是力矩的方向.

力矩的效果是使物体绕旋转轴产生旋转. 力矩越大，物体旋转的倾向就越强. 如果多个力同时作用在物体上，总力矩是各个力矩的矢量和.

刚体的合力矩不为零是产生角加速度的原因，对于同一个刚体，力矩越大，角加速度越大，其定量关系我们将在转动定律一节中给出.

冲量矩

冲量矩是力矩在一段时间内对物体转动状态的累积影响（可以类比：冲量是力在一段时间内对物体平动状态的累积影响）. 它是力矩 $\vec{\tau}$ 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内对时间的积分，表示为：

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\,\mathrm{d}t$$

其中：

- $\vec{\tau}$ 是力矩，表示力对物体转动的影响，是矢量.
- t_1 和 t_2 是力矩作用的起始时间和终止时间.
- $\Delta\vec{L}$ 是冲量矩，是一个矢量，方向与力矩方向相同.

冲量矩的单位是 **牛顿 · 米 · 秒**（$\mathrm{N\cdot m\cdot s}$），由力矩（$\mathrm{N\cdot m}$）与时间（s）的乘积决定.

其余关于冲量矩的知识，在给出角动量的定义之后再进行讨论.

4.3.4 转动惯量

定义及其物理意义

转动惯量是描述物体绕某一轴转动时惯性大小的物理量. 它反映了物体在转动过程中保持其运动状态的能力，类似于平动中的质量. 对于离散的质点系，转动惯量的定义为：

$$I = \sum m_i r_i^2$$

其中：

- m_i 是第 i 个质点的质量；
- r_i 是第 i 个质点到转轴的垂直距离.

对于质量连续分布的物体，转动惯量可以用积分表示：

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m$$

其中 r 是质量元 $\mathrm{d}m$ 到转轴的距离.

转动惯量是物体转动惯性的度量，它决定了物体在受到外力矩作用时，角加速度的大小. 转动惯量越大，物体在受到相同力矩时，获得的角加速度越小，即越难改变其转动状态.

常见刚体的转动惯量公式

刚体类型	转轴位置	转动惯量公式	说明
细棒	绕中心轴	$I=\frac{1}{12}ML^2$	M 是棒的质量，L 是棒的长度
细棒	绕一端轴	$I=\frac{1}{3}ML^2$	M 是棒的质量，L 是棒的长度
细圆环	绕中心轴	$I=MR^2$	M 是环的质量，R 是环的半径
细圆环	绕直径轴	$I=\frac{1}{2}MR^2$	M 是环的质量，R 是环的半径
薄圆盘	绕中心轴	$I=\frac{1}{2}MR^2$	M 是盘的质量，R 是盘的半径
实心球体	绕直径轴	$I=\frac{2}{5}MR^2$	M 是球体的质量，R 是球体的半径
薄球壳	绕直径轴	$I=\frac{2}{3}MR^2$	M 是球壳的质量，R 是球壳的半径

下面给出以上部分公式的推导：

- 质量 m，长 l 的匀质棒绕端点的转动惯量 I

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^l x^2\mathrm{d}x\cdot\frac{m}{l}=\frac{1}{3}ml^2$$

- 质量 m，长 l 的匀质棒绕中心点的转动惯量 I

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\cdot m\cdot\frac{\mathrm{d}x}{l}=\frac{1}{12}ml^2$$

- 质量 m，半径为 R 的圆环绕中心点的转动惯量 I

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi} R^2\cdot\frac{m}{2\pi R}\cdot R\mathrm{d}\theta=mR^2$$

- 质量 m，半径为 R 的圆盘绕中心点的转动惯量 I

$$I=\int x^2\mathrm{d}m=\int_0^R x^2\frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mR^2$$

转动惯量的其他计算方法

转动惯量的计算方法取决于物体的形状和质量分布. 对于简单的几何形状，可以通过积分直接计算. 对于复杂形状，可以使用平行轴定理或垂直轴定理简化计算.

平行轴定理

如果已知物体绕质心轴的转动惯量 I_{cm}，则绕与质心轴平行且距离为 d 的另一轴的转动惯量 I 可以通过平行轴定理计算：

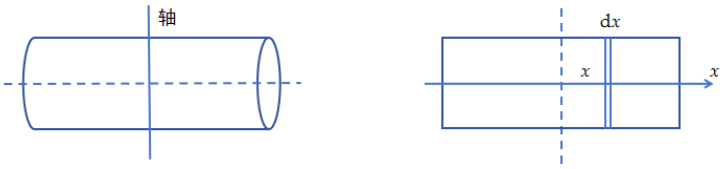
$$I=I_{\mathrm{cm}}+Md^2$$

其中 M 是物体的总质量，d 是两轴之间的距离.

下面给出一个利用平行轴定理计算转动惯量的例子：

例题 4.2 求匀质圆柱绕图中轴线的转动惯量，已知质量为 m，半径为 R，长度为 a.

解



如图所示建立 x 轴

取 x 处 $\mathrm{d}x$ 薄片，则平行轴定理可知：

$$\mathrm{d}J = \rho\pi R^2\mathrm{d}x \cdot x^2 + \mathrm{d}J_c$$

其中 $\mathrm{d}J_c$ 为薄片绕直径旋转的转动惯量：

$$\mathrm{d}J_c = \frac{1}{4}\rho\pi R^2\mathrm{d}x \cdot R^2$$

故：

$$\mathrm{d}J = \rho\pi R^2x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\rho\pi R^2 \cdot R^2\mathrm{d}x$$

积分得：

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\left(\rho\pi R^2x^2 + \frac{1}{4}\rho\pi R^4\right)\mathrm{d}x \\ &= \rho\pi R^2\left(\frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}aR^2\right) \end{aligned}$$

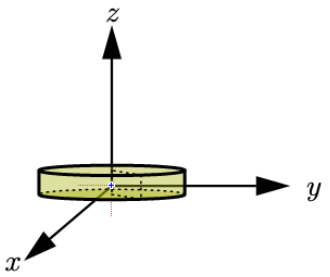
代入 $\rho = \dfrac{m}{\pi R^2 a}$：

$$J = m\left(\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}R^2\right)$$

垂直轴定理

对于薄平板物体，如果已知其绕两个互相垂直的轴（如 x 轴和 y 轴）的转动惯量 I_x 和 I_y，则绕垂直于平面的 z 轴的转动惯量可以通过垂直轴定理计算：

$$I_z = I_x + I_y$$



例题 4.3 求一个质量为 m, 半径为 R 的薄圆盘绕直径轴旋转的转动惯量.

解

由上文可知，$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}mR^2$

所以 $I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2$

这一定理在大物阶段应用不多，了解即可.

转动惯量的特点

1. **质量分布相关**：转动惯量不仅与物体的质量有关，还与质量的分布密切相关. 质量分布越远离转轴，转动惯量越大.
2. **轴依赖性**：转动惯量是针对特定转轴定义的，不同的转轴对应不同的转动惯量.
3. **标量性**：转动惯量是一个标量.

4.3.5 角动量及角动量守恒

角动量

角动量是描述物体转动状态的物理量. 根据研究对象的不同，角动量的计算方式不尽相同.

质点的角动量：对于一个质点，其角动量 $\vec{L}$ 是一个矢量，定义为相对于某固定点（或轴）的位置矢量 $\vec{r}$ 与动量矢量 $\vec{p}$ 的叉乘：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

其中：

- $\vec{r}$ 是质点相对于固定点的位置矢量，其大小为质点到该点的距离.
- $\vec{p} = m\vec{v}$ 是质点的动量，其中 m 是质点的质量，$\vec{v}$ 是质点的速度.

角动量的大小为：

$$L = rp\sin\theta$$

其中 θ 是 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 之间的夹角. 角动量的方向由右手螺旋法则确定：当右手四指从 $\vec{r}$ 指向 $\vec{p}$ 时，大拇指的方向即为角动量的方向.

刚体的角动量：对于一个绕固定轴转动的刚体，其角动量可以表示为：

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

其中：

- I 是刚体的转动惯量，它取决于刚体的质量分布和转轴的位置.
- $\vec{\omega}$ 是刚体的角速度，表示刚体绕轴旋转的快慢.

角动量的分解：在更复杂的系统中，角动量可以进一步分解为**轨道角动量和自旋角动量**. 轨道角动量描述了物体绕某中心点的运动，而自旋角动量描述了物体自身的旋转. 例如，地球绕太阳运动时，地球的总角动量可以分解为轨道角动量（地球质心绕太阳运动的角动量）和自旋角动量（地球绕地轴自转的角动量）.

这里给出一个简单的计算角动量的例子：

例题 4.4 一根杆，质量为 m，长度为 l，绕自身以角速度 ω_0 旋转，与此同时，其质心绕 O 点作半径为 r，角速度为 ω_1 的匀速圆周运动，求系统角动量.

解

此刚体的角动量可以分解为轨道角动量和自旋角动量：

$$L = L_0 + L_c$$

代入对应角动量的计算公式，得：

$$L = \frac{1}{12}ml^2\omega_0 + mr^2\omega_1$$

角动量定理

角动量定理描述了系统角动量随时间的变化率与外力矩之间的关系. 角动量定理的微分形式为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{外}$$

其中：

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ 是角动量随时间的变化率.
- $\vec{\tau}_{外}$ 是作用于系统的合外力矩，即所有外力矩的矢量和.

这表明，系统角动量的变化率等于作用于系统的合外力矩.

角动量定理的积分形式描述了在一段时间 t_1 到 t_2 内，系统角动量的变化量与外力矩的冲量矩之间的关系：

$$\Delta\vec{L}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{r}_{外}\mathrm{d}t$$

这表示，在时间区间 $[t_1,t_2]$ 内，系统角动量的变化量等于外力矩在这段时间内的冲量矩. 这是冲量矩的另一个物理意义，即冲量矩等于角动量变化量.

角动量守恒定律

角动量守恒定律是角动量定理的直接推论. 当系统所受的合外力矩为零时，根据角动量定理：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$$

这意味着系统的总角动量 $\vec{L}$ 在运动过程中保持不变. 用数学形式表示为：

$$\vec{L}_{初}=\vec{L}_{末}$$

角动量守恒定律是自然界中一个基本的守恒定律，适用于所有物理系统，无论宏观还是微观. 它表明，当系统不受外力矩作用时，系统的转动状态保持不变.

下面举几个角动量守恒的简单例子：

1. **花样滑冰运动员的旋转**

   当花样滑冰运动员在旋转时，如果外力矩为零（忽略空气阻力和冰面摩擦），其角动量守恒. 运动员通过改变身体的姿态（例如收拢手臂），可以改变转动惯量 I. 根据 $L=I\omega$，当 I 减小时，角速度 ω 增大，从而实现快速旋转.

2. **开普勒第二定律**

   开普勒第二定律，也称为面积定律，指出一个行星在相等时间内，扫过的面积相等. 我们可以利用角动量守恒来证明这个定律.

   考虑一个行星绕太阳运动，行星的质量为 m，太阳的质量为 M，行星相对于太阳的位置矢量为 $\vec{r}$，行星的速度为 $\vec{v}$. 行星绕太阳的角动量为：

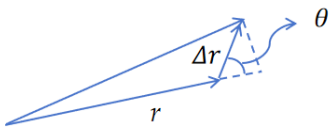
   $$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

   由于太阳的引力方向始终沿着行星和太阳的连线，因此太阳对行星的力矩为零. 根据角动量定理，行星的角动量守恒，角动量的大小为：

   $$L=mrv\sin\theta$$

   现在考虑行星在一小段时间 Δt 内扫过的面积 ΔA. 这个面积可以近似为一个三角形的面积，其底边为 r，高为 $\Delta r\sin\theta$. 因此，面积 ΔA 为：

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r(\Delta r)\sin\theta$$



由于 $\Delta r = v\Delta t$，我们可以将上式改写为：

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r(v\Delta t)\sin\theta = \frac{1}{2}(rv\sin\theta)\Delta t = \frac{1}{2} L\Delta t$$

这表明，在相等的时间间隔 Δt 内，行星扫过的面积 ΔA 是相等的，因为 L 是一个常数. 因此，我们证明了开普勒第二定律.

下面，给出一道使用角动量守恒定律解决问题的经典例题：

例题 4.5 均质直杆悬挂在 O 点，可绕 O 点在屏幕内转动，受到速度为 v 的小球沿垂直于杆的方向的撞击，撞击后小球嵌入直杆，则小球直杆系统的动量（　）

A. 守恒

B. 增大

C. 减小

D. 不一定

笔记 碰撞瞬间，悬挂点对系统可能有力的作用，因此系统的动量不一定守恒. 但在碰撞前后，系统对悬挂点的合冲量矩为零，因此关于悬挂点角动量守恒. 列出角动量守恒方程，再根据动量定理，即可计算出悬挂点对系统的冲量大小和方向，由此判断动量的变化.

解

设冲击瞬间，O 对杆的水平冲量为 I_x，正方向与 v 相同.

碰撞前后，系统对 O 点角动量守恒：

$$mvy = \frac{1}{3}\lambda l^3\omega + my^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mvy}{\frac{1}{3}\lambda l^3 + my^2}$$

其中，ω 是碰后系统转动的角速度，λ 是杆的线密度

对系统水平方向列动量定理：

$$I_x = \frac{1}{2} l\cdot\omega\cdot\lambda l + my\omega - mv$$

代入 ω 并化简，得：

$$I_x = \frac{\lambda^2 mv(3y-2L)}{2\lambda l^2 + 6my^2}$$

因此，当 $y > \frac{2}{3}l$ 时，$I_x > 0$，P 增大

当 $y < \frac{2}{3}l$ 时，$I_x < 0$，P 减小

当 $y = \frac{2}{3}l$ 时，$I_x = 0$，P 不变

选 D.

结论 P 是否守恒，与小球的冲击位置有关！

4.3.6 转动定律

转动定律是刚体中非常重要和基本的定理，其地位相当于是刚体中的牛顿第二定律.

对于绕固定轴转动的刚体，转动定律可以表示为：

$$\sum \tau = I\vec{\alpha}$$

其中：

- $\sum \tau$ 是作用于刚体的合外力矩，即所有外力矩的矢量和.
- I 是刚体的转动惯量.
- $\vec{\alpha}$ 是刚体的角加速度，表示角速度随时间的变化率，单位是弧度/秒 ^{2}（rad/s^2）.

转动定律表明，作用于刚体的合外力矩与刚体的角加速度成正比. 这说明，要使刚体获得一定的角加速度，必须施加相应的外力矩；而刚体的转动惯量越大，改变其转动状态所需的力矩也越大.

与平动定律的对比：

转动定律与牛顿第二定律（平动定律）有类似的数学形式. 平动定律描述的是物体的线性运动，表达式为：

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

其中：

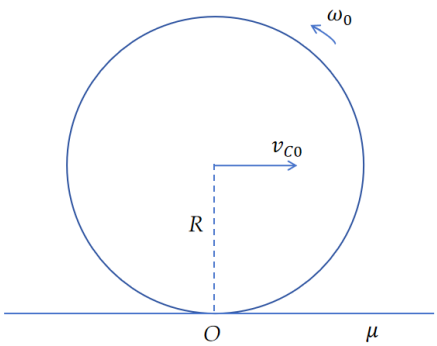
- $\sum \vec{F}$ 是作用于物体的合外力.
- m 是物体的质量.
- $\vec{a}$ 是物体的线加速度.

转动定律和牛顿定律的对应关系如下：

- 力矩（τ）对应力（$\vec{F}$）.
- 转动惯量（I）对应质量（m）.
- 角加速度（$\vec{\alpha}$）对应线性加速度（$\vec{a}$）.

下面，我们给出一道经典的刚体题目，来感受一下转动定律是怎么和牛顿第二定律完美融合的：

例题 4.6 如图，半径为 R 的乒乓球，绕质心轴的转动惯量 $I=\frac{2}{3}mR^2$，m 为乒乓球的质量，以一定的初始条件在粗糙的水平面上运动，开始时球的质心速度为 v_{C0}，初角速度为 ω_0，两者的方向如图所示. 已知乒乓球与地面之间的摩擦系数为 μ，试求乒乓球开始作纯滚动运动所需的时间及纯滚时的质心速度.



解

规定如图的水平向右为质心速度的正方向，规定如图的逆时针转动为角速度的正方向. 在球又滚又滑阶段，滑动摩擦力为定值. 由质心运动定理，有

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=-\mu mg$$

积分，并利用初条件为：

$$t=0\text{时},v_C=v_{C0}$$

得：

$$v_C=v_{C0}-\mu gt \tag{1}$$

由转动定理：

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\mu mgR$$

积分，并利用初条件为：

$$t=0\text{时},\omega=\omega_0$$

得：

$$\omega=\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t \tag{2}$$

由分析，纯滚条件为：

$$v_C=-R\omega \tag{3}$$

设达到纯滚的时间为 t_1（即又滚又滑阶段的时间为 t_1），把 (1)、(2) 式，代入 (3) 式，得：

$$v_{C0}-\mu gt_1=-R\left(\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t_1\right)$$

解出：

$$t_1 = \frac{v_{C0} + R\omega_0}{\mu g\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} = \frac{2(v_{C0} + R\omega_0)}{5\mu g}$$

把 t_1 代入 (1) 式，得出开始纯滚时质心速度为：

$$v_C(t_1) = v_{C0} - \mu g t_1 = v_{C0} - \frac{2}{5}(v_{C0} + R\omega_0) = \frac{3}{5}v_{C0} - \frac{2}{5}R\omega_0$$

4.3.7 柯尼希定理及刚体的动能

柯尼希定理

柯尼希定理是质点系动力学中的一个重要定理，用于描述质点系的动能分解. 该定理指出，质点系的总动能可以分解为两部分：

1. **质心的平动动能.**
2. **质点系相对于质心的动能.**

具体来说，质点系的总动能 T 可以表示为：

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

其中：

- M 是质点系的总质量.
- v_c 是质心的速度.
- m_i 是第 i 个质点的质量.
- v_i' 是第 i 个质点相对于质心的速度.

更直白的物理解释：

- **质心的平动动能：** $\frac{1}{2}Mv_c^2$，相当于将整个质点系的质量集中在质心上，以质心的速度进行平动.
- **相对于质心的动能：** $\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$，表示质点系相对于质心的运动（包括转动、振动等运动）.

柯尼希定理的数学推导

假设质点系由 N 个质点组成，每个质点的位置矢量为 $\vec{r}_i$，质心的位置矢量为 $\vec{r}_c$. 质点系的总动能可以表示为：

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

其中 v_i 是第 i 个质点的速度. 根据质心的定义，质点的速度可以分解为：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$

其中 $\vec{v}_c$ 是质心的速度，$\vec{v}_i'$ 是质点相对于质心的速度. 因此，总动能可以写为：

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2$$

展开后得到：

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + \sum_i m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i'$$

由于质心的速度 $\vec{v}_c$ 是所有质点速度的加权平均，因此：

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

这意味着交叉项为零，因此总动能可以简化为：

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

这就是柯尼希定理的数学表达形式.

柯尼希定理在刚体中的应用

对于刚体，其运动可以看作是质心的平动和绕质心的转动的叠加. 因此，刚体的总动能也可以通过柯尼希定理进行分解.

假设刚体绕质心轴的角速度为 $\vec{\omega}$，则质点相对于质心的速度 $\vec{v}_i'$ 可以表示为：

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

其中 $\vec{r}_i'$ 是质点相对于质心的位置矢量. 因此，刚体的总动能可以表示为：

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2$$

对于刚体，上式可以进一步简化为：

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

其中：

- I_c 是刚体关于质心轴的转动惯量.
- ω 是刚体的角速度.

通过柯尼希定理，我们可以清晰地理解刚体的动能分解：

1. **质心的平动动能：** $\frac{1}{2}Mv_c^2$，表示刚体整体的平动能量.
2. **绕质心的转动动能：** $\frac{1}{2}I_c\omega^2$，表示刚体绕质心的旋转能量.

因此，刚体的总动能 T 可以表示为：

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

定轴转动刚体的动能

对于刚体的一般运动，其总动能可以分为两部分：质心的平动动能和绕质心的转动动能. 然而，当刚体绕固定轴或通过质心的轴转动时，其动能可以完全用转动惯量和角速度来描述. 当刚体绕固定轴（或通过质心的轴）转动时，其动能可以表示为：

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

其中：

- I 是刚体相对于该轴的转动惯量.
- ω 是刚体的角速度.

推导：

假设刚体绕某一固定轴转动，刚体上每个质点的质量为 m_i，到转轴的距离为 r_i，则每个质点的动能为：

$$T_i = \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

对所有质点求和，得到刚体的总动能：

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

其中，$I = \sum_i m_ir_i^2$ 是刚体相对于该轴的转动惯量.

感兴趣的同学可以对比定轴转动的动能公式和利用柯尼希定理写出的动能公式，试试由此推导出平行轴定理.

下面给出两道道刚体动能的简单应用：

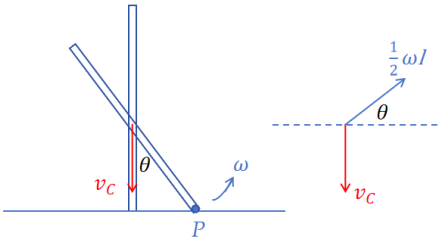
例题 4.7 长为 l 的匀质棒，质量为 m，从静止竖直状态开始，给一个微扰，令其从静止倒下，求其落地时的质心速度.

解

设下落棒与竖直成 θ 时，质心速度为 v，棒角速度为 ω

由于水平动量守恒，全程杆的水平动量为零，故质心只有竖直向下速度 v

前后能量守恒：



$$mg\cdot\left(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}l\cos\theta\right)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

其中 $I=\dfrac{1}{12}ml^2$

取棒的下端点 P，其仅有水平速度，其关联关系有：

$$v_y=\omega\frac{1}{2}l\cdot\sin\theta-v=0$$

联立得到：

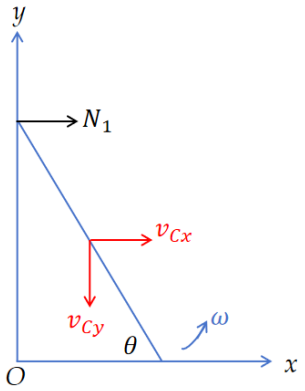
$$v=\sqrt{\frac{3lg(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{3\sin^2\theta+1}}$$

代入 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，得：

$$\theta=\sqrt{\frac{3}{4}gl}=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

例题 4.8 一个匀质杆靠在光滑墙上，初始竖直静止，现给一个微扰，棒与水平夹角为多少时杆脱离墙面？

解



如图建立 x 轴 y 轴

质心坐标：

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{1}{2}l\cos\theta, \frac{1}{2}l\sin\theta\right) \quad \overrightarrow{v_c} = \left(-\frac{1}{2}l\sin\theta, \frac{1}{2}l\cos\theta\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

能量守恒，则：

$$mg\frac{l}{2}(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

其中：

$$v^2 = \frac{1}{4}l^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \quad I = \frac{1}{12}ml^2 \quad \omega = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

则有：

$$mg\frac{l}{2}(1-\sin\theta) = \left(\frac{1}{8}ml^2 + \frac{1}{24}ml^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$3g(1-\sin\theta) = l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

水平动量：

$$P_x = mv_x = m\frac{1}{2}l\sin\theta\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|$$

需要注意，水平动量的增加是因为墙提供向右的支持力. 当水平动量最大时，说明墙与杆之间已无相互作用，也就是脱离的时刻！

写出水平动量的表达式：

$$P_x = \frac{1}{2}ml\sin\theta\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\sin\theta)} = \frac{1}{2}ml\sqrt{\frac{3g}{l}\sin^2\theta(1-\sin\theta)}$$

只需分析 $\sin^2\theta(1-\sin\theta)$ 最大值即可. 得：

$$\sin\theta = \frac{2}{3}$$

此即分离时的角度.

4.4 真题演绎

练习 4.1 下列说法中正确的是（　　）

A. 作用在定轴转动刚体上的力越大，刚体转动的角加速度越大；
B. 作用在定轴转动刚体上的合力矩越大，刚体转动的角速度越大；
C. 作用在定轴转动刚体上的合力矩越大，刚体转动的角加速度越大；
D. 作用在定轴转动刚体上的合力矩为零，刚体转动的角速度为零.

解 C

由 $M=J\beta$ 可知，C 正确.

✍ **练习 4.2** 一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人，把人和圆盘取作系统. 当在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，则此系统（　）

A. 动量守恒

B. 机械能守恒

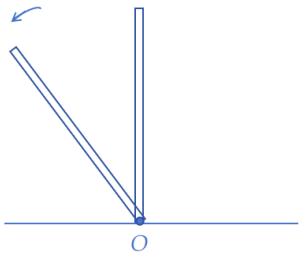
C. 对转轴的动量矩守恒

D. 上述物理量均不守恒

解 C

水平方向动量不守恒，存在摩擦力导致机械能不守恒，内力矩一定为零且不存在外力矩所以动量矩守恒.

✍ **练习 4.3** 一根长为 l，质量为 m 的均质细杆竖立在地面上，如果此杆以下端接地处 O 为轴转动而倒下，则杆的上端 A 到达地面时的速率为（　）



A. $\sqrt{gl}$

B. $\sqrt{2gl}$

C. $\sqrt{3gl}$

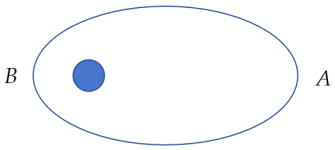
D. $2\sqrt{gl}$

解 C

$\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{2}J\omega^2$,$J=\frac{1}{3}ml^2$

$v_A=\omega l$，解得 C.

✍ **练习 4.4** 如图所示，一颗卫星沿椭圆轨道绕地球旋转，若卫星在远地点 A 和近地点 B 的动量矩（角动量）与动能分别用 L_A、E_{kA} 和 L_B、E_{kB} 表示，则有（　）



A. $L_B=L_A$，$E_{kB}=E_{kA}$

B. $L_B=L_A$，$E_{kB}>E_{kA}$

C. $L_B > L_A$，$E_{kB} = E_{kA}$

D. $L_B > L_A$，$E_{kB} > E_{kA}$

解 **B**

由开普勒第二定律可知，轨道角动量守恒，因此 $L_A = L_B$.

因为轨道能量守恒，B 处引力势能小于 A 处，所以 B 处动能较大.

✍ **练习 4.5** 有两个半径相同，质量相等的圆环 A 和 B，A 环的质量分布均匀，B 环的质量分布不均匀. 它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则 (　　)

A. $J_A > J_B$

B. $J_A < J_B$

C. $J_A = J_B$

D. 不能确定 J_A、J_B 哪个大

解

C

取微元分析并积分，两个环的转动惯量都是 mr^2.

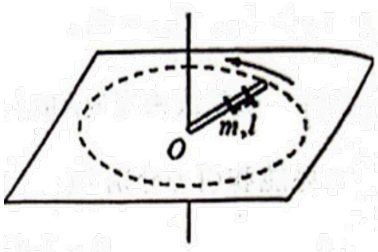
✍ **练习 4.6** 花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0. 然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $J_0/3$，这时她转动的角速度变为_____；她的转动动能_____ (此空填增大、减小或不变).

解 $3\omega_0$　　增大

由于人角动量守恒，所以 $J_0\omega_0 = \dfrac{1}{3}J_0\omega$.

转动动能 $E = \dfrac{1}{2}J\omega^2$，计算得增大.

✍ **练习 4.7** 如图所示，一根质量均匀分布的细棒长为 l，质量为 m. 现将细棒放在粗糙的水平桌面上，棒可绕过其端点 O 的竖直轴转动，已知棒与桌面的摩擦系数为 μ. 则细棒绕轴转动时所受到的摩擦力矩为_____；细棒从角速度 ω_0 开始到停止转动所经过的时间为_____.



解 $\dfrac{1}{2}\mu mgl$　　$\dfrac{2l\omega_0}{3\mu g}$

取微元分析并积分得到摩擦力矩 τ 为：$\tau = \mu mg\dfrac{l}{2}$

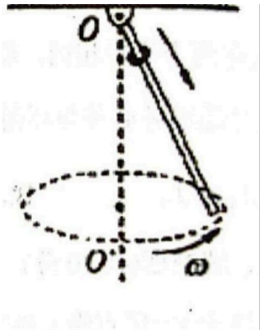
先计算细棒的角加速度 β: $\tau = J\beta$

将摩擦力矩 τ 和转动惯量 J 代入，解出角加速度 β：$\beta = \dfrac{3\mu g}{2l}$

当细棒停止转动时，角速度 $\omega = 0$：$\omega_0 = \dfrac{3\mu g}{2l}t$

解出时间 t：$t=\dfrac{2l\omega_0}{3\mu g}$

✍ **练习 4.8** 如图所示，一光滑细杆上端由光滑铰链固定，杆可绕其上端在任意角度的锥面上绕竖直轴 OO' 作匀角速度转动. 有一小环套在杆的上端处，开始时使杆在一个锥面上运动起来，而后小环由静止开始沿杆下滑. 在小环下滑过程中，小环、杆和地球系统的机械能_____，小环加杆对轴 OO' 的动量矩_____.(两个空填“增大、减小或不变”)



解 不变　　不变

在小环下滑过程中，由于没有摩擦力，整个系统（小环、杆和地球）的机械能守恒.

由于合外力矩只由重力产生，不产生竖直方向力矩，所以系统对轴角动量守恒，动量矩不变.

✍ **练习 4.9** 两人各持一均匀直棒的一端，棒的重力为 W，一人突然放手，在此瞬间，另一人感到手上的力变为_____.(均质直杆对过其端点且垂直直杆的轴的转动惯量 $J=\dfrac{1}{3}ml^2$)

解 $N=\dfrac{1}{4}W$

设后来人感受到的力为 N，则 $W-N=ma$.

$a=\dfrac{1}{2}l\beta$，$mg\dfrac{l}{2}=J\beta$

解得 $N=\dfrac{1}{4}W$

✍ **练习 4.10** 轻绳的一端系着质量为 m 的小球，另一端穿过光滑水平桌面中心的小孔用手拉紧. 开始时使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓缓将绳下拉，使运动半径缩小为 r_2. 试求：

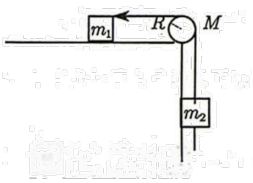
1. 小球的角速度；
2. 在此过程中对小球做的功.

解

1. 角动量守恒得 $m\omega_1 r_1^2=m\omega_2 r_2^2$，解得 $\omega_2=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1$
2. 在此过程中对小球做的功对小球做的功 W 为动能的变化：$W=K_2-K_1$

$$W=\frac{1}{2}m\frac{r_1^4}{r_2^2}\omega_1^2-\frac{1}{2}mr_1^2\omega_1^2=\frac{1}{2}m\omega_1^2\left(\frac{r_1^2(r_1^2-r_2^2)}{r_2^2}\right)$$

✍ **练习 4.11** 如图所示的系统，滑轮可视为半径为 R、质量为 M 的均质圆盘，滑轮与绳子间无滑动，水平面光滑. 若 $m_1=50\,\mathrm{kg}, m_2=200\,\mathrm{kg}, M=15\,\mathrm{kg}, R=0.10\,\mathrm{m}$，$g=10m/s^2$ 求物体的加速度及绳中的张力.



解

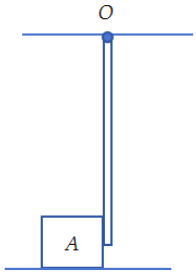
对物块列牛顿第二定律方程：$T_1 = m_1 a, m_2 g - T_2 = m_2 a$

对滑轮列转动定律方程：$(T_2 - T_1)R = \frac{1}{2}MR^2\beta$

由于滑轮与绳子无滑动：$a = \beta R$

计算得到：$a = 7.77 m/s^2, T_1 = 388.35N, T_2 = 446.60N$

✍ **练习 4.12** 如图所示，长为 h、质量为 M 的均质杆，一端悬挂于 O 点，并可绕通过 O 点垂直于纸面的光滑轴转动. 今使杆自水平位置无初速度地落下，在铅垂位置与静止的、质量为 m 的物体 A 在极短的时间作完全非弹性碰撞，碰撞后物体 A 沿水平方向滑动的距离为 s. 试求物体 A 与水平面之间的滑动摩擦系数 μ.



解

杆重力势能转化为动能，根据能量守恒定律：$\frac{1}{2}Mgh = \frac{1}{2}J\omega^2$

得到角速度 ω 为：$\omega = \sqrt{\frac{3Mgh}{Mh^2}} = \sqrt{\frac{3g}{h}}$

发生非弹性碰撞时，杆和物体的系统相对于轴角动量守恒：$J\omega = J\omega' + mhv, v = \omega' h$

物体 A 滑动的距离 s 后停止，摩擦力做的功等于动能的减少：$\mu mgs = \frac{1}{2}mv^2$

解得:$\mu = \frac{3hM^2}{2s(M+3m)^2}$

✍ **练习 4.13**

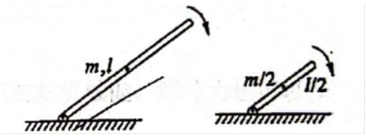
如图所示，质量为 m 和 $2m$ 的两个质点 A 和 B，用一长为 l 的轻质细棒（质量不计）相连，系统绕通过杆上 O 点且与杆垂直的轴转动. 已知 O 点与 A 点相距 $\frac{2l}{3}$，B 点的线速度为 v，且与杆垂直. 则该系统对轴的转动惯量为 _____，角动量大小为 _____.



解 $\frac{2}{3}ml^2 \quad 2mvl$

$$J = m(\frac{2}{3}l)^2 + 2m(\frac{1}{3}l)^2 = \frac{2}{3}ml^2$$
$$\omega = \frac{v}{\frac{1}{3}l}$$
$$L = J\omega$$

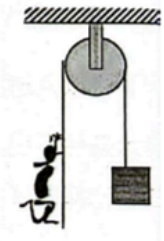
✍ **练习 4.14** 一根质量为 m、长为 l 的细而均匀的棒，其下端铰接在水平地板上并竖直地立起，如让它掉下，则棒将以角速度 ω 撞击地板. 如图将同样的棒截成长为 $l/2$ 的一段，初始条件不变，则它撞击地板时的角速度最接近于 _____.



解 $\sqrt{2}\omega$

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$
$$\frac{1}{2}mg\frac{l}{4} = \frac{1}{48}ml^2\omega'^2$$

✍ **练习 4.15** 一具有光滑转轴的定滑轮，半径为 R，质量为 $\frac{m}{4}$，质量均匀分布在定滑轮的边缘上. 一轻绳跨过该定滑轮，轻绳与滑轮间无相对滑动，其左端有一质量为 m 的人爬在轻绳上，而右端则系了一质量为 $\frac{m}{2}$ 的重物，如图所示. 试求：当人相对于轻绳匀速向上攀爬时，重物上升的加速度.



解 $a = \frac{2}{7}g$

对人列牛顿第二定律方程：$mg - T_1 = ma$

对重物列牛顿第二定律方程：$T_2 - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}ma$

对滑轮列转动定律方程：$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{4}mR^2\beta$(注意题目条件，质量均匀分布在滑轮的边缘，所以转动惯量和圆环的转动惯量等价)

$a = \beta R$

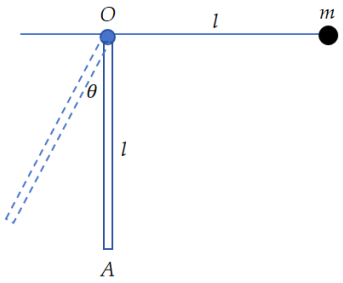
解得 $a = \frac{2}{7}g$

✍ **练习 4.16** 长为 l 的匀质细棒，一端悬于 O 点，自由下垂，如图所示. 一单摆也悬于 O 点，摆线长也为 l，摆球质量为 m. 现将单摆拉到水平位置后静止释放，摆球在 A 处与棒作完全弹性碰撞后恰好静止.

试求：

1. 细棒的质量 M；

2. 碰后细棒摆动的最大角度 θ.
（均质直杆对过其端点且垂直直杆的轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}Ml^2$）

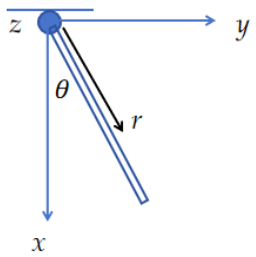


解

1. 弹性碰撞，能量守恒：$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2$
发生碰撞系统对轴角动量守恒，$mv_0l=J\omega$
解得：$M=3m$
2. 机械能守恒：$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=mgl$
解得：$\theta=\arccos\frac{1}{3}$

练习 4.17 长为 l，质量分布不均匀的细杆，其线密度为 $\lambda=a+br$（a、b 为常量），细杆可绕轴 z 在铅直平面内运动，如图所示，忽略轴 z 的摩擦力，将杆从水平位置释放，试求：

1. 杆相对轴 z 的转动惯量；
2. 杆转动到 θ 角时杆所受的对轴 z 的力矩；
3. 杆转动到 θ 角时杆的角加速度 β；
4. 杆转到铅直位置时，杆所具有的角速度 ω.



解

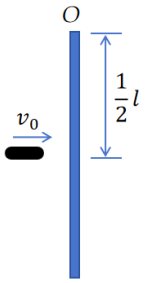
1. $J=\int_0^l\lambda r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}al^3+\frac{1}{4}bl^4$
2. $M=\int_0^l\lambda gr\sin\theta\mathrm{d}r=g\sin\theta(\frac{1}{2}al^2+\frac{1}{3}bl^3)$
3. $M=J\beta,\beta=\frac{g\sin\theta(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}bl)}{\frac{1}{3}al+\frac{1}{4}bl^2}$
4. $\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=\frac{g\sin\theta(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}bl)}{\frac{1}{3}al+\frac{1}{4}bl^2}$

解得：$\omega=\sqrt{\dfrac{2g(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}bl)}{\frac{1}{3}al+\frac{1}{4}bl^2}}$

练习 4.18 如图所示，一长为 l，质量为 M 的均匀细棒悬挂于通过其上端 O 点的光滑水平固定轴上（棒绕此轴的转动惯量为 $\dfrac{1}{3}Ml^2$）. 现有一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 射向棒的中心，并以 $\dfrac{v_0}{2}$ 的速度穿出棒.

试求：

1. 子弹穿出棒时，棒的角速度是多少?
2. 如果此后棒的最大偏转角恰为 90°，则 v_0 的大小是多少?



解

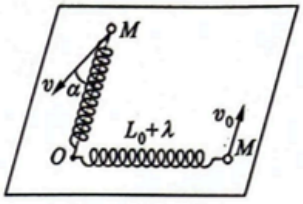
1. 由于系统绕轴角动量守恒，所以：$mv_0\dfrac{l}{2}=m\dfrac{v_0}{2}\dfrac{l}{2}+J\omega$

   $\omega=\dfrac{3mv_0}{4Ml}$

2. 机械能守恒：$Mg\dfrac{l}{2}=\dfrac{1}{2}J\omega^2$

   $v_0=\dfrac{4M}{m}\sqrt{\dfrac{gl}{3}}$

练习 4.19 原长为 L_0、劲度系数为 k 的弹簧，一端固定在一光滑水平面上的 O 点，另一端系一质量为 M 的小球. 开始时，弹簧被拉长 λ，并给予小球一与弹簧垂直的初速度 v_0，如图所示. 求当弹簧恢复其原长 L_0 时，小球速度 v 的大小和方向（即夹角 α）.



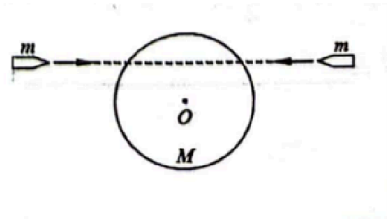
解

由系统能量守恒：$\dfrac{1}{2}k\lambda^2+\dfrac{1}{2}Mv_0^2=\dfrac{1}{2}Mv^2$

系统角动量守恒：$Mv_0(L_0+\lambda)=Mv\sin\alpha L_0$

解得：$v=\sqrt{\dfrac{k\lambda^2+Mv_0^2}{M}}$，　$\alpha=\arcsin\left(\dfrac{v_0(L_0+\lambda)}{L_0\sqrt{\frac{k\lambda^2+Mv_0^2}{M}}}\right)$

✍ **练习 4.20** 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 O 转动，如图射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反且在同一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并停留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度会（　）



A. 增大.
B. 不变.
C. 减小.
D. 不能确定.

解 C

角动量不变，转动惯量增大，所以角速度减小.

4.5 知识扩展

4.5.1 进动

刚体进动的定义

刚体进动是指当一个旋转的刚体受到外力矩作用时，其转轴会绕着一个垂直于外力矩方向的轴线做圆锥形的运动. 例如，常见的陀螺仪在受到重力等外力矩作用时，就会出现进动现象. 陀螺仪的转轴原本是高速旋转的，当它竖立在地面上时，重力会对它产生一个力矩，这个力矩的方向是水平的. 而陀螺仪的转轴不会直接倒下，而是会绕着一个垂直于地面的轴线做圆周运动，这就是进动.

进动产生的原因

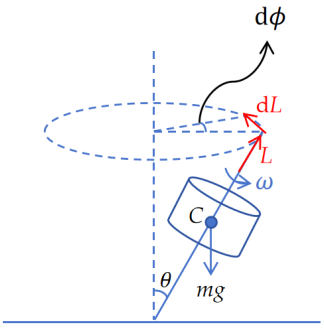
从物理学的角度来看，刚体进动是角动量定理的体现. 当刚体绕某一轴旋转时，它具有角动量. 当外力矩作用于刚体时，根据角动量定理，外力矩会使刚体的角动量发生变化. 然而，由于刚体的旋转惯性，它不会直接改变旋转轴的方向，而是会使旋转轴绕着另一个轴转动，以保持角动量矢量的变化与外力矩矢量相符合.

一例定量计算的进动问题

例题 4.9 质量为 m 的陀螺对称轴高速旋转，角速度为 ω，绕对称轴的转动惯量为 I，质心到转轴下端的距离为 l_c. 在重力矩的作用下，陀螺将绕竖直轴作缓慢进动，试求进动角速度的近似值.

笔记 陀螺在重力矩 M 的作用下，由角动量定理：$M \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}L$，角动量在 $\mathrm{d}t$ 时间内将改变 $\mathrm{d}L$，因陀螺高速旋转，自转角动量很大，其他角动量（主要是指由于进动产生的额外角动量，也包含由于自转轴上下摆动，也就是章动，产生的额外角动量）可忽略，故 $\mathrm{d}L$ 近似认为是 L 在力矩方向偏转的量，于是 L 将绕竖直轴进动，进动角速度可求.

解



取转轴下端 O 点为参考点，陀螺受到的重力矩为：

$$M = mgl_c \sin\theta$$

设 $\mathrm{d}t$ 时间内角动量 L 的改变量为 $\mathrm{d}L$，其方向与力矩方向相同，大小为：

$$\mathrm{d}L = L\sin\theta \cdot \mathrm{d}\phi$$

由角动量定理：

$$M \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}L$$

由以上三式，得：

$$mgl_c \sin\theta \cdot \mathrm{d}t = L\sin\theta \cdot \mathrm{d}\phi$$

故进动角速度为：

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{mgl_c}{L} = \frac{mgl_c}{I\omega}$$

第 5 章 狭义相对论

5.1 引言

在经典物理学中，时间和空间被视为绝对、独立的存在. 然而，随着对光速不变性和高速运动物体的研究，这种传统观念逐渐暴露出问题.1905 年，爱因斯坦提出了狭义相对论，以相对性原理和光速不变原理为核心，打破了时间和空间的绝对性，引入了它们的相对性概念.

狭义相对论中，长度收缩、时间膨胀同时的相对性等效应在日常生活中难以察觉，因此很多狭义相对论中的结论并不直观可感. 在学习狭义相对论的过程中，各种参考系的来回转换可能会让你觉得“烧脑”，在解题过程中也会遇到各种“奇怪现象”和难以解释的悖论，这都是在所难免的.

遇到这些问题时，一方面需要大家深刻理解概念和公式的用法，搞清各种公式的适用条件；另一方面也鼓励同学们多与老师、同学们交流，在研讨中发现自己的问题，构建狭义相对论的时空观.

5.2 考情速递

狭义相对论部分主要考察以下知识点：

- 狭义相对论的时空观，主要包含钟慢、尺缩、洛伦兹变换
- 狭义相对论的动力学初步，主要包含高速粒子的能动量关系

考察的特点如下：

- 计算量不大，列式简单，一道题基本只有几个式子，但容易套错公式，需要明确钟慢尺缩使用的条件，需要学会使用洛伦兹变换解决一般性问题
- 相对论动力学部分对概念的考察较为深入，学习时注意区分动质量、静质量、动能、静能等概念

5.3 知识剖析

5.3.1 洛伦兹变换、尺缩公式和钟慢公式

初学者经常会搞不清楚这三个公式的适用条件，事实上这三个公式并不是同一“层次”的公式. 洛伦兹变换描述的是在不同参考系中看同一事件的方法，而尺缩钟慢是洛伦兹变换的导出关系.

洛伦兹变换：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

钟慢

对于 S' 系中的两个事件：他们之间仅有时间间隔，没有空间间隔

$$A(x', y', z', t'_1) \quad B(x', y', z', t'_2)$$

在 S 系中有

$$A\left(\frac{x' + vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z', \frac{t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad B\left(\frac{x' + vt'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z', \frac{t'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

S 系中看到的两事件时间间隔

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

即为钟慢公式.

尺缩

对于 S' 系中的两个事件：它们之间仅有空间间隔

$$A(x'_1, y', z', t') \quad B(x'_2, y', z', t')$$

S 系中

$$A\left(\frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z', \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad B\left(\frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, y', z', \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

S 系中两事件空间间隔

$$\Delta x = x_B - x_A = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

故尺缩公式为

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-\beta^2}$$

注意事项

这里有一个误区（坑），很多人，尤其是初学者，喜欢对于 S' 系中的两个事件的空间间隔应用尺缩公式. 但是，其实这是不正确的，尺缩仅仅是针对于 S' 系或 S 系中实实在在的尺子才可以使用的. 准确来说，尺缩公式是这样推导出来的：

在 S 系中有两个事件：

A：看尺子前端 (x_1, y_1, z_1, t_1)

B：看尺子后端 (x_2, y_2, z_2, t_2) $(y_1 = y_2, z_1 = z_2)$

在 S' 系中

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S 系中空间间隔:

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x_1 - x_2) - v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

但是测量尺长时，S 系中尺子是动的，S' 系中尺子是不动的，因此为了保证 S 系中测得尺长的准确，应当同时看前后两端

$$t_1 = t_2$$

则

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = (x_1' - x_2')\sqrt{1-\beta^2} = L\sqrt{1-\beta^2}$$

因此：尺缩公式不是长度变换（或距离变换），对于 S' 系中同时发生的事件，在 S 系中看要用洛伦兹变换，洛伦兹变换才是求解相对论问题的正确打开方式.

结论

S' 系中同地不同时 $\to S$ 系　用钟缓.

S' 系中长度固定不变 $\to S$ 系　用尺缩.

其他 $S \to S'$ 和 $S' \to S$　对每个事件用洛伦兹变换，然后作差.

例题 5.1 飞船以 $u = 0.6c$ 飞离地球. 假设头部向尾部发出一个光讯号. 飞船上经 $\Delta t' = 1\mu s$ 后尾部接受器接收到该信号，求地面上观察者测得光讯号到达船尾的时间 Δt.

笔记 对洛伦兹变换的理解：观察者站在不同参考系中观测事件引发的事件的空间坐标和时间坐标的变化. 在同一参考系中，某些经典力学的结论仍然成立.

解

以飞船参考系为 S' 系，地面系为 S 系. 在飞船系中，事件 A：发出光，事件 B，接受光.

在 S 系中，对 A：$(\beta = \frac{u}{c})$

$$x_A = \frac{x'_A + ut'_A}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad t_A = \frac{t'_A + \frac{u}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

对 B:

$$x_B = \frac{x'_B + ut'_B}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad t_B = \frac{t'_B + \frac{u}{c^2}x'_B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S 系中的时间差:

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{u}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在 S' 系中，光沿 x' 负方向: $x'_B - x'_A = -c(t'_B - t'_A)$

代入得

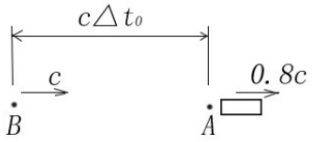
$$\Delta t = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(t'_B - t'_A) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta t' = 0.5\mu s$$

例题 5.2 地面参考系中工作人员发射脉冲信号时间间隔为 3s，地面上工作人员认为两信号被接受的时间间隔_____s.

解

因为不涉及参考系的变换，两个都是在地面系中观察，这就是一个普通的追及问题.

A 信号被接收时:

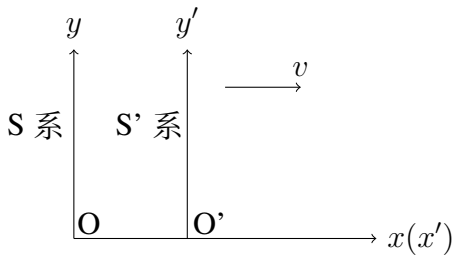


因此时间差为:

$$\Delta t = \frac{c\Delta t_0}{c - 0.8c} = 5\Delta t_0 = 15s$$

可以看出，这一小问没有使用相对论.

5.3.2 速度变换



采用微分法推导速度变换　$\beta=\dfrac{v}{c}$

$$\begin{cases}\mathrm{d}x'=\dfrac{\mathrm{d}x-v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \mathrm{d}y'=\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z'=\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}t'=\dfrac{\mathrm{d}t-\frac{v\mathrm{d}x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

算出速度变换

$$\begin{cases}u'_x=\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{u_xv}{c^2}}\\ u'_y=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\\ u'_z=\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=\dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases}u_x=\dfrac{u'_x+v}{1+\frac{u'_xv}{c^2}}\\ u_y=\dfrac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}\\ u_z=\dfrac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}\end{cases}$$

对比伽利略变换

$$\begin{cases}u_x=u'_x+v\\ u_y=u'_y\\ u_z=u'_z\end{cases}$$

5.3.3 关于能量

与经典不同之处在于，引入了总能量 $E=mc^2$（爱因斯坦指出，m 比 $\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 更恰当）

- 静能 $E_0=mc^2$
- 总能 $E=mc^2$
- 动能 $E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

由几个公式可以推导出 $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$

因此，在相对论的世界中，只有动能是不容易确定的，它应由总能量与静能相减得到. 总能量和静能都可以由静质量和动质量得到.

在这一部分的计算中，更多是一些原子物理方面的情境，比如 Λ^0 超子衰变.

在原子物理中使用的单位制是：质量 MeV/c^2　能量 MeV　动量 MeV/c

因此较为方便计算，没有必要为光速 c 烦琐.

解题方面：

1. 总能量之和不变（即能量守恒）.
2. 碰撞、衰变、分裂过程中动量守恒.
3. 直接的结论就是粒子的静质量之和不守恒 $\rightarrow$ 质量亏损.

5.4 真题演绎

✍ **练习 5.1** 地面上 A,B 两点相距 100m，一短跑选手由 A 跑到 B 历时 10s，试问在与运动员同方向运动，飞行速度为 $0.6c$ 的飞船系中观测，这选手由 A 到 B 跑了多少距离？经历多长时间？速度的大小和方向如何？

解

设地面为 S 系，飞船为 S' 系，

S 系中 $\Delta x=100\,\mathrm{m}$，$\Delta t=10\,\mathrm{s}$

S' 系中 $\Delta x'=\dfrac{\Delta x-0.6c\Delta t}{\sqrt{1-0.6^2}}=-2.25\times10^9\,\mathrm{m}$，　$\Delta t'=\dfrac{\Delta t-\frac{0.6c}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-0.6^2}}=12.5\,\mathrm{s}$，

速度大小为 $v'=0.6c=1.8\times10^8\,\mathrm{m/s}$，方向与飞船运动方向相反

✍ **练习 5.2** 假设宇宙飞船从地球出发，沿直线到达月球，距离是 $3.84\times10^8\,\mathrm{m}$，在地球上测得宇宙飞船的速率为 $0.30c$；试求：

1. 根据地球上的时钟，这次旅行花费的时间；
2. 根据在宇宙飞船上所做的测量，地球和月球的距离；
3. 宇宙飞船上的时钟所记录的旅行时间.（$c=3\times10^8\,\mathrm{m/s}$）

解

1. $t=\dfrac{s}{v}=4.27\,\mathrm{s}$
2. $s'=s\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=3.84\times10^8\times\sqrt{1-0.3^2}=3.66\times10^8\,\mathrm{m}$

3. $t' = \dfrac{s'}{v} = 4.07\,\mathrm{s}$

✍ **练习 5.3** 设快速运动的介子的能量约为 $E = 3000\,\mathrm{MeV}$，而这种介子在静止时的能量为 $E_0 = 100\,\mathrm{MeV}$. 若这种介子的固有寿命为 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$，试求：

1. 介子的运动速度；
2. 介子在衰变前运动的距离（光速 $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$）.

解

1. $\dfrac{E}{E_0} = \dfrac{mc^2}{m_0c^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$，$\therefore v = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
2. $\tau = \dfrac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 30\tau_0$，$l = vt = 30v\tau_0 = 1.799 \times 10^4\,\mathrm{m}$

✍ **练习 5.4** 一宇航员要到离地球 5 光年的星球去旅行，如果宇航员希望把这段路程缩短为 3 光年，则他所乘的火箭相对于地球的速度 v 应为（　）

A. 0.5c
B. 0.6c
C. 0.8c
D. 0.9c

解 C

$5 \times \sqrt{1-(v/c)^2} = 3 \Rightarrow v = 0.8c$

✍ **练习 5.5** 一粒子在加速器中被加速，当其动能变为静止能量的 4 倍时，其质量为静止质量的（　）倍.

A. 5
B. 6
C. 4
D. 8

解 A

$E = 4 \times m_0c^2 + m_0c^2 = 5m_0c^2$，故质量为静止质量的 5 倍

✍ **练习 5.6** 以下说法正确的是：

(1) 所有惯性系对物理基本规律都是等价的；
(2) 在真空中，光在惯性系的速率与光的频率、光源的运动状态无关；
(3) 在任何惯性系中，光在真空中沿任何方向的传播速率都相同.

A. 只有 (1)、(2) 是正确的
B. 只有 (1)、(3) 是正确的
C. 只有 (2)、(3) 是正确的
D. 三种说法都是正确的

解 D

✍ **练习 5.7** 已知惯性系 S' 相对于惯性系 S 以 $0.5c$ 速度沿 x 轴负方向运动，若从 S' 系的坐标原

点 O' 沿 x' 轴正方向发出一光波，则 S 系中测得此光波在真空中的波速为_____.

解 c

光速不变原理.

✍ **练习 5.8** 设电子的静止质量为 m_0，将一个电子从静止加速到速率为 $0.6c$（c 为真空中光速），需做功_____.

解 $0.25m_0c^2$

$$W=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.6^2}}-m_0c^2$$

✍ **练习 5.9** 观察者甲以 $0.8c$ (c 为真空中光速) 相对于静止的观察者乙运动. 若甲携带一长度为 l、截面积为 S、质量为 m 的棒，这根棒安放在运动方向上，则甲测得此棒的密度为_____；乙测得此棒的密度为_____.

解 $\dfrac{m}{Sl};\dfrac{25m}{9Sl}$

甲：$\rho=\dfrac{m}{Sl}$;

乙：$l'=l\sqrt{1-\dfrac{(0.8c)^2}{c^2}}=0.6l$，$m'=\dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{(0.8c)^2}{c^2}}}=\dfrac{5}{3}m$，$\rho'=\dfrac{m'}{Sl'}=\dfrac{25m}{9Sl}$.

✍ **练习 5.10** 有两个静止质量均为 m_0 的粒子，以分)$0.8c$ 的速度相向运动，对心碰撞后合成一个复合粒子，则该复合粒子的静止质量 $M_0=$_____，速度大小 $=$_____.

解 $\dfrac{10}{3}m_0$，0

由于碰撞动量守恒，碰后速度为 0.

所以碰后只有静止能量，由能量守恒可以得到碰后静止质量.

✍ **练习 5.11** 一艘宇宙飞船的船身固有长度为 $L_0=90\,\mathrm{m}$，相对于地面以 $v_0=0.8c$ 的速度在一观测站的上空飞过.（$c=3\times10^8\,\mathrm{m/s}$）

求：

1. 观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔是多少?
2. 宇航员测得船身通过观测站的时间间隔是多少?

解

1. $L'=L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=54\,\mathrm{m}$，$\Delta t'=\dfrac{L'}{v}=\dfrac{54}{0.8\times3\times10^8}=2.25\times10^{-7}\,\mathrm{s}$
2. $\Delta t=\dfrac{L_0}{v_0}=3.75\times10^{-7}\,\mathrm{s}$

✍ **练习 5.12** 一根细棒固定在 S' 系中，它与 $O'x$ 轴的夹角 $\theta'=60°$. 如果 S' 系以速度 u 沿 Ox 方向相对于 S 系运动，S 系中观察者测得细棒与 Ox 轴的夹角为（　）.

A. 等于 60°

B. 大于 60°

C. 小于 60°

D. 当 S' 系沿 Ox 正方向运动时大于 60°，而当 S' 系沿 Ox 负方向运动时小于 60°

解 **B**

根据相对论的长度收缩效应，只沿运动方向收缩，在 S 系中测得细棒与 Ox 轴的夹角为

$$\tan\theta=\frac{y'}{x'}=\frac{y'}{x'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>\frac{y'}{x'}=\tan 60^\circ,\quad \therefore\theta>60^\circ.$$

✍ **练习 5.13** 在某地发生两事件，与该处相对静止的甲测得时间间隔为 $4s$，若相对甲作匀速直线运动的乙测得时间间隔为 $5s$，则乙相对于甲的运动速度是（　）.

A. $\frac{4}{5}c$

B. $\frac{1}{5}c$

C. $\frac{2}{5}c$

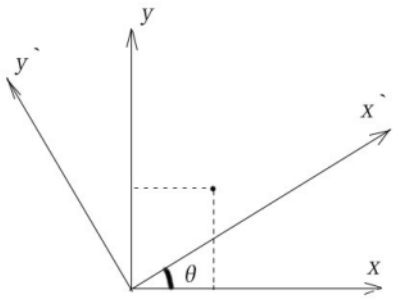
D. $\frac{3}{5}c$

解 $\tau=\dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow 5=\dfrac{4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow v=\dfrac{3}{5}c.$

5.5 知识拓展

5.5.1 关于洛伦兹变换和尺缩、钟缓公式

1. 理解“事件”：相对论中需要抓住的一个要点即是“事件”.对于事件 $A(x,y,z,t)$，其时空坐标在不同参考系是不同的，我们可以用洛伦兹变换将事件的 S 系中的坐标 (x,y,z,t) 换到 S' 系中，得到 S 系坐标 (x',y',z',t').
2. 洛伦兹变换的实质



空间中坐标 (x,y)，在 S 系中坐标为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

洛伦兹变换

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

洛伦兹变换实际上是四维时空（闵氏空间）中的旋转变换.

例题 5.3 太空火箭的初始质量 M_0，从静止起飞，向后喷出的气体相对火箭速度为常数 u，任意时刻设火箭的速度为 v，静止质量为 m_0，试求 $\dfrac{m_0}{M_0}$ 与 v 的关系.

解 设在地球参考系中，时刻 t 火箭的质量为 m（是质量，不是静止质量）.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

设火箭在 t 时刻喷出 $\mathrm{d}m$ 气体，这部分气体与火箭系统动量守恒，但我们先要换到地球参考系，系中的

$$v_{气} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

方向向下.

列动量守恒：$mv = (m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v) + v_{气}|\mathrm{d}m|$

而火箭质量是一直减的（$\mathrm{d}m < 0$），因而有

$$|\mathrm{d}m| = -\mathrm{d}m = -\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{1}$$

带入化简得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v + (v+v_{气})\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \tag{2}$$

这是忽略高阶小量后的表达式

(1)(2) 式代入得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v + \frac{u(1-\beta^2)}{1-\frac{u}{c}\beta^2}\left[\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$$

化简后得 $m_0\mathrm{d}v = u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0$

之后是一系列的积分得

$$\ln m_0 = \frac{c}{2u}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} + C$$

$t=0$ 时 $\beta=0$ $m_0=M_0$，故 $C=\ln M_0$

代入式子得

$$\frac{m_0}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{c}{2u}}$$

如果是考试，应该不会出像这样数学成分比较多的题，主要是注意下动量守恒的式子，有些人可能会这样写

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(v+\mathrm{d}v)-v_{\text{气}}\frac{-\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

肯定不对. 建议大家列动量守恒式时先用动质量 m，再谨慎地换为静质量 m_0.