

大学物理学 (理论)

电磁学复习资料

作者：24 级钱学组

组织：西安交通大学钱学森书院学业辅导中心

时间：June 15, 2025

版本：1.0.1

功崇惟志　业广惟勤

前言

本资料是由钱学森班几位有过物理竞赛经历的同学共同编写的、面向全体工科同学的大学物理学习指导. 在读者开始正式阅读本资料前，笔者有如下几点想对诸位说明：

首先，笔者想来谈谈大学物理这门课程的学科特点. 对于西交的工科生来说，大学物理是一门学的难、考的简单的科目. 也许读者上课听得云里雾里，但请你们放心，从往年的真题来看，大物的考题难度小于作业题，低于各高校的强基考试，其计算量、思维量要远远小于高考物理的压轴题. 因此，如果只是为了应付考试，读者只需掌握好基本概念、认真做作业即可，**在考前阅读本资料时，可以只关注真题部分**.

但是，请诸位不要因为大物的考试题简单、高分众多就轻视了大物的学习. 大学物理所学到的知识，是几乎所有工科专业课程的基础. 例如，力学是大家大二都将学习的《理论力学》的前置知识，电学部分包含了《电路》的基本思想和《电磁场理论》的基本概念……因此，物理的基础打的越扎实，日后专业课的学习就会越游刃有余.

然而，目前大物教材的内容安排远远做不到让学有余力的同学提高物理素养、夯实工科理论基础，读者自行去阅读普通物理教材又会出现内容过难、边角知识太多、学习成本较大的问题.

为了尝试解决这对矛盾，满足同学们的学习需要，24 级钱班部分同学编写了这本《大学物理学习指导》. 在这本资料中，笔者一方面对大物教材中的基础知识做了回顾总结，对老师在课堂上讲过的难点疑点做详细的剖析；另一方面，笔者在普通物理的范围内选取了部分主干知识点加入本书，作为提供给读者的提高阅读材料.

在总体结构安排上，本资料的电磁学部分共安排了三个章节，分别是静电场、磁场和电磁感应. 在每个章节内，又分为考情速递、概念剖析、真题演绎、知识延伸和模型梳理几个部分. 同时，笔者尽量避免出现超纲内容，对所有超出考纲的知识点都进行了高亮标注. 希望通过这样的安排，读者能够根据自己的情况和目标，各取所需、学有所得.

最后，对为本资料付出时间与心血的志愿者们表示诚挚的感谢！同时感谢学组和学辅在本资料编写中给予的支持！

24 级钱学组

2025 年 6 月

参与编写本资料的志愿者名单及分工如下：

- 童瀚文（自动化钱 2401）：内容规划、模型整理、审核
- 石欣浓（能动钱 2401）：排版、绘图、审核、真题题解撰写
- 王仕程（自动化钱 2401）：主体内容撰写、题目编辑
- 杜尚艺（能动 2409）：题目选取、例题题解撰写

目录

目录 ii

第一部分　电磁学 1

第 1 章 静电场 2

1.1 引言 . . . 2
1.2 考情速递 . . . 2
1.3 概念剖析 . . . 2
1.3.1 概念定义与数学基础 . . . 2
基础概念 . . . 2
高斯定理的微分和积分表达式 . . . 3
电势与电场的关系 . . . 3
静电场环路定理与电势能的定义 . . . 4
1.3.2 几种经典电场模型 (包括匀条件) . . . 5
长直导线 ($\lambda, \theta_1, \theta_2, r$ 均已知) . . . 5
均匀带电圆环轴线处 (λ, R, l 均已知) . . . 6
均匀带电圆盘轴线处 (σ, R, l 均已知) . . . 6
无限大带电平板 (σ 已知) . . . 6
电偶极子 . . . 7
均匀带电球体 . . . 7
1.3.3 高斯定理的应用——静电平衡 . . . 8
静电平衡的概念 . . . 8
高斯定理在静电平衡中的应用 . . . 9
1.3.4 电容器、电场能量 . . . 10
电容的定义 . . . 10
经典电容模型 . . . 12
电场能与能量密度 . . . 13
1.3.5 电介质与电介质的极化 . . . 14
1.4 真题演绎 . . . 16
1.5 模型梳理 . . . 21
1.5.1 基本方法 . . . 21
高斯定理 . . . 21
电势计算 . . . 22

1.5.2 二级结论 22
两极板相对面的电荷面密度等大异号 22
整个极板体系最外侧两表面电荷面密度等大同号 23
外侧平板接地，则最外侧表面无电荷分布 24
将极板体系当做串联电容处理 24
两种带电介质的平行板模型 25

第 2 章 磁场 **27**
2.1 引言 27
2.2 考情分析 27
2.3 概念剖析 27
2.3.1 磁场的概念，特点 27
定义 27
特点 27
2.3.2 B-S 定律 28
2.3.3 安培环路定律 28
2.3.4 磁场模型 28
载流圆环轴线上的磁场 28
无限长载流直导线 29
无限长载流平板 30
无限大载流平板 31
亥姆霍兹线圈 32
载流螺线管轴线上的磁场 32
旋转带电圆盘轴线上 33
2.3.5 磁通量 34
2.3.6 安培力和洛伦兹力（配速法） 34
安培力 34
洛伦兹力 35
配速法 37
霍尔效应 38
2.3.7 公式大杂烩（磁场） 39
2.4 真题演绎 39

第 3 章 电磁感应 **43**
3.1 引言 43
3.2 考情速递 43
3.3 知识剖析 43
3.3.1 法拉第电磁感应定律 43

定义总述 43
动生电动势 44
感生电动势 45
涡旋电场及其电路分析 45
3.3.2 自感、互感 49
自感 49
互感 50
3.3.3 磁场的能量 51
磁场的能量 51
磁场强度 52
磁场的能量密度 52
3.3.4 位移电流 53
定义 53
位移电流特点 53
3.3.5 综合例题补充 53
3.4 真题演绎 56

第一部分

电磁学

第 1 章 静电场

1.1 引言

静电场是大学物理中极为重要的内容，它不仅是电磁学的基础，更是理解众多物理现象和应用的关键. 从电荷间的作用力到电场的分布，从电势能的计算到电介质的极化，静电场的知识贯穿了微观世界的奥秘与宏观现象的规律. 在复习中，我们将重新梳理静电场的核心概念，如电场强度、电势、电场线等，理解它们的定义、性质和相互关系. 同时，通过概念剖析和真题演绎，深入掌握静电场的理论基础和解题技巧. 希望大家通过这份资料，能够系统地巩固知识，提升对静电场的理解和应用能力，在期末获得好成绩.

1.2 考情速递

在历年期末题中，静电场这一部分占据了极大的分数. 电场求解，电势能，电场能，电通量，环路定理，电介质所有知识点都在考试中出现，选择填空中各知识点均有过考察，大题中则偏重于电场，电能等计算.

1.3 概念剖析

1.3.1 概念定义与数学基础

基础概念

1. 库仑定律：两个静止点电荷 q_1 与 q_2 之间的相互作用力的大小与 q_1 和 q_2 的乘积成正比，与它们之间的距离 r 的平方成反比，作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸. 令表示 q_1 对 q_2 的库仑力（也称电力），r 表示 q_1 和 q_2 之间的距离，$\hat{r}_{12}$ 表示由 q_1 指向 q_2 的单位矢量（如图 1.3），则库仑定律可表示为

$$\mathbf{F_{12}} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}q_1q_2\hat{r}_{12}$$

其中 $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2 \cdot (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)^{-1}$ 这就是库仑定律的语言叙述和定量公式.

2. 电通量：穿过某一曲面的电场线的根数，即

$$\Delta N = \mathbf{E}\cdot\mathbf{\Delta S_1}$$

常用 $\Delta\Phi$ 表示电场强度通量. 通过该小面积元 ΔS 的电场强度通量为：

$$\Delta\Phi = \mathbf{E}\cdot\mathbf{\Delta S} = E\Delta S\cos\theta$$

电场强度通量的正负取决于电场线与曲面的法线方向的夹角 θ. 当电场线分布不均匀或

曲面不规则时，电场强度通量可以由积分计算：

$$\Phi = \int E\cos\theta \mathrm{d}S$$

曲面法线方向我们默认的规定是：对开曲面凸侧方向的外法线方向为正；对闭曲面外法线方向为正，内法线方向为负.

高斯定理的微分和积分表达式

积分表达式

$$\iint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\sum_{S内} q}{\varepsilon_0}$$

微分表达式

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

电势与电场的关系

微分关系：在空间中，电场强度等于电势的负梯度，即

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

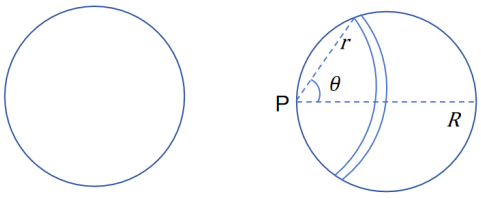
积分关系：从 A 点到 B 点，电势差等于电场强度沿路径的线积分的值，即

$$U_{AB} = \Phi_A - \Phi_B = \int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$$

无论从微分形式还是积分形式，我们不难看出，沿电场线方向途径积分，电势差为正值，即沿电场线方向，电势不断下降；垂直于电场线方向移动，电势不变，即等势面总是垂直于电场线在此处的切线方向.

例题 1.1 如图所示，这是面密度为 σ 的均匀带电薄盘，求：

1. 圆心处的电势
2. 边缘 P 点的电势



解

1. 将圆盘看作无数同心细圆环，进行电势叠加即可

$$\mathrm{d}\Phi = k\frac{\sigma}{r}\mathrm{d}s \quad \mathrm{d}s = 2\pi r\mathrm{d}r$$

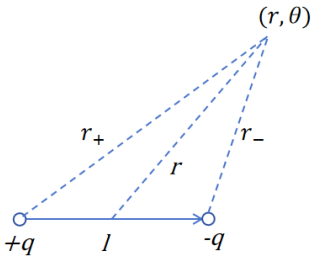
$$\Phi = \int_0^R k\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

2. 将圆盘看作无数细圆弧（劣弧），进行电势叠加即可

$$r = 2R\cos\theta \quad \mathrm{d}r = -2R\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}\Phi = k\frac{\sigma 2r\theta\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\Phi = -\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$

(r 从 0 到 R，故 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0)

例题 1.2 已知电偶极子，电偶极矩为 $\vec{p}$，方向如图，求空间一点处的电势.



解

$$p = ql$$
$$r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\cos\theta}$$
$$r_- = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} + rl\cos\theta}$$
$$\Phi_+ = \frac{kq}{r_+}$$
$$\Phi_- = -\frac{kq}{r_-}$$
$$\Phi_{总} = \Phi_+ + \Phi_-$$

小量近似（泰勒展开保留首阶）得

$$\Phi(r,\theta) = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

同时，可以求 $-\nabla\Phi$ 来求电场分布

静电场环路定理与电势能的定义

静电场的环路定理：在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 沿任意闭合路径的线积分（也称为环路积分）等于零，即 $\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$，其中 L 为任意闭合路径，$\mathrm{d}\vec{l}$ 是路径上的线元矢量定理含义.

静电场力做功与路径无关：该定理表明，静电场力对电荷做功只与电荷的起始位置和终点位置有关，而与电荷所经过的具体路径无关. 这是静电场的一个重要特性，类似于重力场中

重力做功与路径无关. 例如，一个电荷在静电场中从点 A 移动到点 B，无论它是沿着直线还是曲线运动，电场力对它做的功都是相同的.

静电场是保守场：具有这种做功与路径无关性质的场被称为保守场. 在保守场中，可以引入势能的概念. 对于静电场，电荷在电场中具有电势能.

电势的定义：由静电场的环路定理，即电场力做功与路径无关的性质，可知静电场是保守场. 静电场可以与引力场类比，两者都是做功与路径无关的矢量场，即保守力场. 保守力场必是有势场，都可以引进势能的概念. 我们定义电势能为：点电荷处于外电场中某个位置时具有的能量.

当把点电荷 q_0 在电场中从点 P 移动到点 Q 时，电场力对电荷所做的功转化为 P 与 Q 两点电荷电势能的改变量，即

$$A_{PQ} = W_{PQ} = W_P - W_Q = q\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

W_P 就是点电荷 q 在点 P 的电势能，通常把无限远处的电势能定义为零，那么对于分布在有限空间范围内电荷产生的电场来说，有

$$W_P = W_{P\infty} = q\int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -q\int_\infty^P \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

此式表示在电场中将一个电荷 q 从无限远处移动到某点 P 的过程中，电场力对电荷所做的功等于电势能的减少；或者可以说，从无限远移动一个电荷到达点 P，外力克服电场力所做的功就是电荷在该点具有的电势能.

1.3.2 几种经典电场模型 (包括匀条件)

长直导线 ($\lambda, \theta_1, \theta_2, r$ 均已知)

法一：利用电场叠加及微元积分

对于任意 θ 处

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l(r\tan\theta)}{(r/\cos\theta)^2}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}\theta}{r}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})$$

则分别对 E_x, E_y 进行积分

$$E_x = \int_{-\theta_2}^{\theta_1}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}\theta}{r}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

$$E_y = \int_{-\theta_2}^{\theta_1}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}\theta}{r}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

对于无穷长情况下，即 $\theta_i = \dfrac{\pi}{2}$，有

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad E_y = 0$$

法二：高斯定理（只能解决无穷长情况下）

取长为 l 的直导线，无穷长情况下电场方向沿径向，取圆柱高斯面，则有

$$\iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\sum_{S内} q}{\varepsilon_0}$$

代入

$$E2\pi rl=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

笔记 我们选取高斯面求解电场时，选择的高斯面都是极为理想的情况，各处均和电场垂直，且为大小相等，对于有限长，我们并不能做到这样的选取方式，直接积分更为简单.

均匀带电圆环轴线处 (λ, R, l 均已知)

有对称性，各角度处产生电场合成后实为沿轴向电场的叠加

$$E=\int \mathrm{d}E=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0(R^2+l^2)\sqrt{R^2+l^2}}=\frac{\lambda Rl}{2\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}$$

均匀带电圆盘轴线处 (σ, R, l 均已知)

对于均匀带电圆盘，可以视为无数各圆环的叠加

$$E=\int \mathrm{d}E=\int_0^{R}\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r\cdot l}{4\pi\varepsilon_0(r^2+l^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)$$

无限大带电平板 (σ 已知)

法一：利用无穷长直导线

将平板纵切为无数细长矩形，每个细长矩形产生的电场合成后即为所求（不必在意中心的选取，在无穷大条件下均有对称性）

$$E=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\sigma\mathrm{d}l}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2+r^2}\sqrt{l^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

此处积分和计算长直导线一致

法二：利用均匀带电圆盘

此处我们可以理解为 $R\gg l$，则有 $\dfrac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\to 0$，$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

法三：高斯定理

取一圆柱面垂直于平板，两侧电场对称，则有

$$2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

电偶极子

正负电荷产生电场叠加后利用尺寸近似，可计算出中垂线和共线上的电场

$$E_{\perp} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

而对于存在夹角的情况，我们可以分解电偶极矩为垂直和平行于 r 方向，代入上述两式即可

均匀带电球体

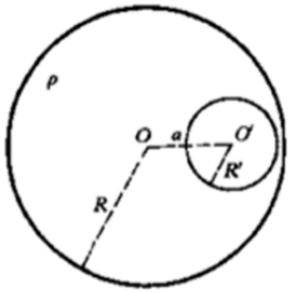
对于均匀带电球体，利用高斯定理

$$\iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_{S\text{内}} q}{\varepsilon_0}$$

研究球体外，内部此时不必考虑电荷的分布，可等效为球心处等量电荷，则有

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R \\ \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r \le R \end{cases}$$

例题 1.3 如图所示，在半径为 R，体电荷密度为 ρ 的均匀带电球体内部挖去半径为 R' 的一个小球，小球球心 O' 与大球球心 O 相距为 a. 试求 O' 的电场强度，并证明空腔内电场均匀.



解

设均匀带电大球（无空腔）在 O' 点的电场强度为 E_1，作以 O 点为中心以 a 为半径的球形高斯面，由静电场的高斯定理，得:

$$\oint E_1 \cdot \mathrm{d}S = (E_1)4\pi a^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi}{3}a^3\rho$$

故:

$$\vec{E_1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

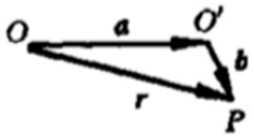
式中 $\vec{a}$ 是从 O 点到 O' 点的矢量.

同样，均匀带异号电的小球 $(R', -\rho)$ 在球心 O' 点的电场强度为：$\vec{E}_2$

$$\vec{E}_2 = 0$$

O' 点的电场强度 $\vec{E}_0$ 为两者之和，即：

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$



如图所示，在小球内任取另一点 P，设 $O'P = b$，$OP = r$，则 P 点的电场强度 $\vec{E_P}$ 为：

$$\vec{E_P} = \vec{E_{1P}} + \vec{E_{2P}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{b} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{b}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

可见：

$$\vec{E_P} = \vec{E}_0$$

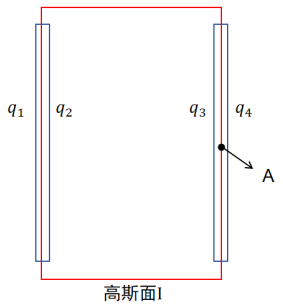
因 P 点任取，故球形空腔内的电场是均匀的.

1.3.3 高斯定理的应用——静电平衡

静电平衡的概念

导体处于静电平衡状态时，导体内部的场强处处为零，导体表面的垂直于导体表面. 此时，导体是等势体，导体表面是等势面.

例题 1.4 两个无限大平面导体板，带电 q_a 和 q_b，求静电平衡时各表面电荷.



解

由于电荷守恒

$$q_1 + q_2 = q_a$$
$$q_3 + q_4 = q_b$$

取高斯面 I，可知

$$q_2 + q_3 = 0$$

对 A 点，电场为 0

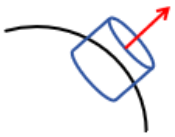
$$\frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S}$$

解得：

$$q_1 = q_4 = \frac{q_a + q_b}{2}$$
$$q_2 = -q_3 = \frac{q_a - q_b}{2}$$

高斯定理在静电平衡中的应用

1. 证明导体内部场强为零：在导体内部作任意高斯面，由于静电平衡时导体内部没有净电荷，根据高斯定理 $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 Q_{内}$，式中 $\vec{E}$ 是电场强度，S 是高斯面的面积元，$Q_{内}$ 是高斯面内包围的净电荷，ε_0 是真空介电常数. 因为 $Q_{内} = 0$，所以 $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$. 又因为高斯面是任意选取的，所以可以得出导体内部场强 $\vec{E} \equiv 0$.
2. 求解导体表面电荷分布与场强关系：
   在导体表面附近取一个很小的高斯面，如圆柱形高斯面，其底面与导体表面平行，一个底面在导体内部，另一个底面在导体外部. 由于导体内部场强为零，所以通过导体内部底面的电通量为零. 而导体表面的场强垂直于导体表面，通过圆柱侧面的电通量也为零，只有通过导体外部底面的电通量不为零. 设导体表面的电荷面密度为 σ，根据高斯定理可得 $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\Delta S = \varepsilon_0 \sigma \Delta S$，则导体表面附近的场强 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. 该式表明导体表面附近的场强与导体表面的电荷面密度成正比，而与表面形状无关.



3. 求解带电导体对自身表面任意位置的静电作用力:

分析处于导体外部、无限接近导体表面的 M 点，并且设在 M 点附近，面积为 $\mathrm{d}S$ 的导体区域内，电荷面密度为 σ. 通过高斯定理，结合上一题，得到 M 处的电场强度为:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{方向垂直于表面}$$

注意到，M 处的总电场是由 $\mathrm{d}S$ 上的电荷和该导体上其他电荷共同产生的.

对于 M 点来说，$\mathrm{d}S$ 上的电荷可以等效为一个无限大带电平板，产生的场在该点的贡献为:

$$E_{\text{self}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{方向垂直于表面向外}$$

因此，其他电荷在该点产生的场为:

$$E_{\text{Other}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{方向同样向外}$$

然后，我们就可以计算表面电荷的受力了.

表面电荷元素 $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$ 所受的力由其他电荷产生的场 E_{Other} 决定.

力的大小为:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}q \cdot E_{\text{Other}} = \sigma \mathrm{d}S \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}S \quad \text{方向垂直于表面向外}$$

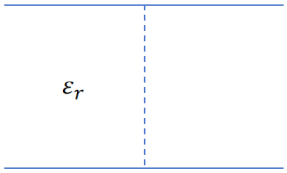
1.3.4 电容器、电场能量

电容的定义

电容是指在给定电位差下的电荷储藏量，记为 C，国际单位是法拉（F）.

电容的定义式为 $C = \dfrac{Q}{U}$，其中 Q 为电容器所带的电荷量（单位是库仑），U 是电容器两极板间的电势差（单位是伏特）. 这意味着电容 C 等于电容器所带电荷量 Q 与两极板间电势差 U 的比值. 从物理意义上讲，电容是描述电容器容纳电荷本领的物理量. 电容越大，说明电容器在相同电势差下能够储存的电荷量越多，即其容纳电荷的本领越强.

例题 1.5 如图两个板子，右边真空左边有 ε_r 的电介质，求体系电容.



解

法 **1**：可视为左侧极化后的电容和右边正常电容的并联

$$C_{总} = C_1 + C_2$$

则

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S_1}{d} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_2}{d}$$

故

$$C_{总}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S_1}{d}+\frac{\varepsilon_0 S_2}{d}$$

法 **2**：如果用极化电荷相关知识

设左板自由电荷为 Q_1，右侧 Q_2

则

$$E_1=\frac{Q_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r S_1}\quad E_2=\frac{Q_2}{\varepsilon_0 S_2}$$

等势

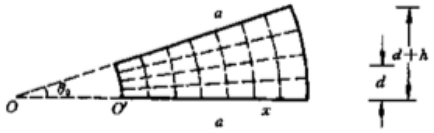
$$E_1 d=E_2 d\Rightarrow\frac{Q_1}{\varepsilon_r S_1}=\frac{Q_2}{S_2}$$

$$U=E_1 d=\frac{Q_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r S_1}d$$

故

$$C=\frac{Q_{总}}{U}=\frac{Q_1+Q_2}{\frac{Q_1 d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S_1}}=\frac{Q_1+\frac{S_2}{S_1\varepsilon_r}Q_1}{\frac{Q_1 d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S_1}}=\frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_r S_1+S_2)$$

例题 1.6 两块长与宽均为 a 与 b 的导体平板在制成平行板电容器时稍有偏斜，使两板一对宽边相距为 d，另一对宽边相距为 $(d+h)$，且 $h\ll d$. 若此电容器内充满了相对电容率为 ε_r 的电介质，求电容器的电容.



解

视为很多无限长平板并联

$$\theta\approx\arctan\frac{h}{a}\approx\frac{h}{a}$$

$$\mathrm{d}C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\mathrm{d}x b}{\theta x}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b\mathrm{d}x}{\frac{h}{a}x}$$

$$C=\int_{\frac{d}{\theta}}^{d+a}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b}{\frac{h}{a}x}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{h}\ln\frac{d+h}{d}$$

由于 $h\ll d$ 则近似后有

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{h}\ln\left(1+\frac{h}{d}\right)\approx\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{d}\left(1-\frac{h}{2d}\right)$$

注意：若近似到一阶则答案不够精确，其结果与平面电容无差别，所以应近似到二阶.

例题 1.7 两个同心导体球壳构成电容器，外球壳的内半径是固定的，其大小为 5cm，内球壳的外半径可以自由选择，两球壳之间充满了各向同性的均匀介质. 已知电介质的击穿电场强度为 $2.0 \times 10^7 \mathrm{V/m}$，试求该电容器所能承受的最大电压.

解

设球内外分别带电 Q，$-Q$，则

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (R_{内} < r < R_{外})$$

该电压为 ΔU，则可知

$$\Delta U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_{内}} - \frac{1}{R_{外}}\right)$$

消去 Q 可得

$$\Delta U = E_r \cdot r^2\left(\frac{1}{R_{内}} - \frac{1}{R_{外}}\right)$$

当承受最大电压时，电场达到击穿场强，且 $r = R_{内}$

故

$$\Delta U = E_{击} \cdot R_{内}^2\left(\frac{1}{R_{内}} - \frac{1}{R_{外}}\right)$$

利用函数求导可知

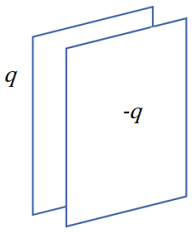
$$\Delta U_{\max} = 2.5 \times 10^5 \mathrm{V}$$

经典电容模型

1. 正对平板，使平板带电 q，$-q$，则可以表示场强及电势 U.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \sigma = \frac{q}{S}, \quad U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

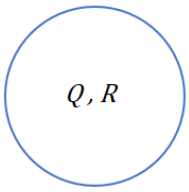
$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



2. 孤立导体球，使球体带电 q, 以无穷远处为电势零点.

$$U = \frac{kQ}{R}$$

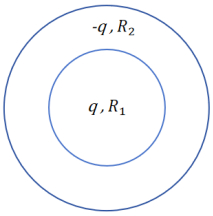
$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$



3. 同心球壳，使内外球壳带电 $q, -q$.

$$E = \frac{kq}{r^2} \quad U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{E}{\varepsilon} \mathrm{d}r = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} kq$$

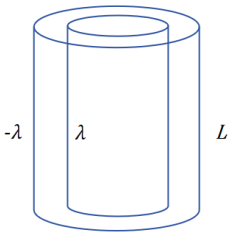
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



4. 同轴圆筒，使内壳带电线密度为 λ, 外壳带电线密度为 $-\lambda$, 取长度为 L.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda L}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



电场能与能量密度

1. **电场能**

   定义：电场能是电场具有的能量. 当电荷在电场中移动时，电场力会对电荷做功，这意味着电场具有能量，可以通过电场力做功将电场能转化为其他形式的能量，如电荷的动能等.

计算：对于平行板电容器，其电场能 E_e 可以通过公式 $E_e = \frac{1}{2}CU^2$ 计算，其中 C 是电容，U 是电容器两极板间的电势差. 更一般地，在静电场中，电场能可以通过对整个电场空间进行积分来计算，即

$$E_e = \frac{1}{2}\int \rho\Phi \mathrm{d}V,$$

其中 ρ 是电荷体密度，Φ 是电势，$\mathrm{d}V$ 是体积元.

2. **能量密度**

定义：能量密度是指单位体积内的电场能量，用 ω_e 表示. 它描述了电场能量在空间中的分布情况.

计算：在各向同性的均匀电介质中，电场能量密度的计算公式为

$$\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2,$$

其中 ε 是电介质的介电常数，E 是电场强度. 对于真空中的电场，$\varepsilon = \varepsilon_0$（真空介电常数）. 这个公式表明，电场能量密度与电场强度的平方成正比，电场强度越大的地方，电场能量密度越高，即电场能量在该区域分布越集中. 例如，在一个点电荷产生的电场中，离点电荷越近的地方，电场强度越大，根据能量密度公式可知，此处的电场能量密度也越大.

通过能量密度，我们可以方便地计算某一区域内的电场能，只需将能量密度在该区域的体积上进行积分，即

$$E_e = \int \omega_e \mathrm{d}V.$$

笔记

电场能是指由于电场的存在而在空间中储存的能量. 电场是由电荷产生的，当其他电荷进入这个电场时，电场力会对这些电荷做功，这个做功的过程就是电场能的表现. 电场能与电荷的分布和电场的强度有关.

电势能是电场能的一种表现形式，它是指带电物体因其在电场中的位置而具有的能量. 电势能的大小取决于电荷的量和它在电场中的位置. 电势能是一个相对值，通常我们选择一个参考点作为零电势能点.

1.3.5 电介质与电介质的极化

首先理解，**什么是电介质？**

与导体相对应，电介质实际上是绝缘体，它是不导电的. 这点很重要，因为这意味着电介质上的“极化电荷”不能自由转移.

现在，我们先来讨论一个经典的极化过程：

在真空中有一个场强为 $\vec{E}_0$ 的匀强场，现在放入一个塑料材质的、绝缘的电介质球，于是，受电场影响，球表面就会出现极化电荷. 极化电荷会在空间中产生一个退极化场 $\vec{E}'$. 于是空间的总场强 $\vec{E}$ 就可以表示为：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

需要注意的是，在极化过程中，虽然 $\vec{E}'$ 是被 $\vec{E}_0$ 激发的，但极化电荷的分布是和总场 $\vec{E}$ 相关的，具体的关系为：

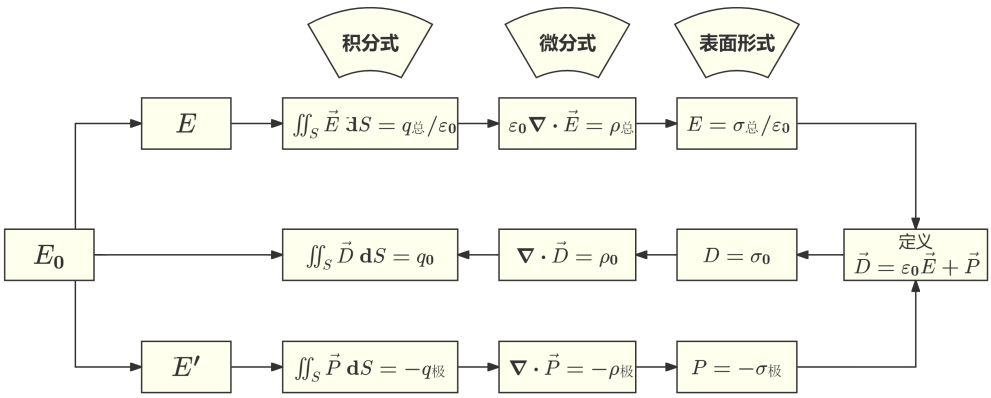
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

因此它也会被退极化场影响. 可以理解为，第一次由 $\vec{E}_0$ 激发出来的极化电荷，由于产生了初始的退极化场，因此会影响极化电荷的分布，使第一次的极化电荷重新排布，这样的过程在持续一段时间后，最终极化电荷的分布达到平衡.

在电极化的这套理论中，有三种电荷，三个物理量，它们之间具有一一对应的关系，关系如下：

- $\vec{E}$ 用来描述总电荷
- $\vec{D}$ 用来描述自由电荷
- $\vec{P}$ 用来描述极化电荷（大物不涉及）.

它们之间的关系如图所示：



可见，电位移矢量 $\vec{D}$ 不是凭空出现的，而是人们为了便于描述带电体系中的自由电荷而引入的一个物理量.$\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 一样，也满足高斯定理，只不过是对于自由电荷而言的.

除此之外，涉及电介质的题目，一般有以下常用公式：

$$\vec{E} = \varepsilon_r \vec{E}_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

现在对第二个公式进行一些简单的说明：

1. $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$，知道一个，可以求得另一个. 在具体的题目中，找到他们两个中一个好计算的矢量场的分布，就可以得到另一个.
2. 这个公式只适用于均匀线性（各向同性的）电介质，对于各向异性的电介质（如晶体），

电位移矢量和电场强度矢量并不满足简单线性关系，详情可阅读电磁学中有关介电张量的内容.

此外，上面讲解中提到了电极化强度矢量 $\vec{P}$，它在大物阶段并没有涉及，在此提及是为了保证知识体系的完整性. 有兴趣的同学可以阅读《新概念物理教程——电磁学（第三版）赵凯华等著》P166-168.

1.4 真题演绎

练习 1.1 电容器以下两种情况减少两极板距离后，电场能量怎么变：(1) 连接电源；(2) 断开电源（　）.

A. (1) 和 (2) 均增大

B. (1) 增大，(2) 减小

C. (1) 和 (2) 均减小

D. (1) 减小，(2) 增大

解 B

极板距离减小，C 增大

对于情况一，此时电压不变，利用 $W=\frac{1}{2}CU^2$，可知（1）增大

对于情况二，此时电量不变，再利用 $C=\frac{Q}{U}$，替换电压，有 $W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$，可知（2）减小

练习 1.2 一空心导体球壳带电 $+q$，其内、外半径分别为 R_1、R_2，现在球心处又放置一个点电荷 $+q$，设无穷远处电势为零，则静电平衡后，导体球壳的电势为（　）.

A. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

B. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

C. $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$

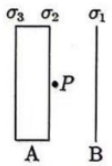
D. $\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$

解 D

由于静电感应，导体球壳内表面带电 $-q$，电荷量守恒得到，球壳外表面带电 $2q$.

将电势进行叠加计算得到 $\Phi=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$

练习 1.3 如图所示，A 为一无限大带电导体平板，B 为与导体平板表面平行的无限大均匀带电平面，其面电荷密度为 σ_1. 静电平衡后，A 板两表面的面电荷密度分别为 σ_2 和 σ_3，那么极靠近 A 板右侧面的一点 P 的场强大小为（　）.



A. $\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$

B. $\dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$

C. $\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$

D. $\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$

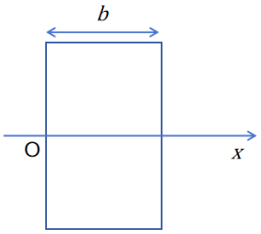
解 **D**

无限大带电平板产生的场强 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

将电场进行叠加，得到 D.

练习 1.4 如图所示，厚度为 b 的“无限大”带电平板，其电荷体密度为 $\rho=kx^2(0\leq x\leq b)$，式中 k 为一正的常量. 试求：

1. 平板外任意点 P_1 处的电场强度；
2. 平板内任一点 P 处电场强度；
3. 此板左右两面的电势差，并判断那一面电势高.



解

1. 将厚度为 b 的带电平板分成无数非常薄的带电平板，在位置为 x 处，厚度为 $\mathrm{d}x$ 的无限大平板，$\sigma=\rho\mathrm{d}x$

   则 $\vec{E_1}=\displaystyle\int_0^b\frac{kx^2\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{kb^3}{6\varepsilon_0}\vec{i}$

2. 同理将平板进行划分

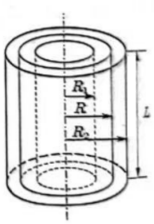
   则 x 处的 $\vec{E_2}=\displaystyle\int_0^x\frac{kx'^2\mathrm{d}x'}{2\varepsilon_0}\vec{i}-\int_x^b\frac{kx'^2\mathrm{d}x'}{2\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{k(2x^3-b^3)}{6\varepsilon_0}\vec{i}$

3. 由于 $\Phi_{Ob}=-\displaystyle\int_0^b E_2\mathrm{d}x=\frac{kb^4}{12\varepsilon_0}$

   所以左侧面电势高，电势差为 $\Phi_{Ob}=\dfrac{kb^4}{12\varepsilon_0}$

练习 1.5 一个圆柱电容器由两个同轴的圆筒形导体极板组成，内、外极板的半径分别为 R_1 和 R_2，电容器的长度为 L，且 $L\gg(R_2-R_1)$. 两极板之间充满了两层均匀电介质，如图所示，其分界面的半径为 R. 已知内层介质的相对电容率为 $\varepsilon_{r1}=4.0$，外层电介质的相对电容率为 $\varepsilon_{r2}=2.0$，若充电后内外极板上所带的电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$，不计电场的边缘效应，试求：

1. 两层介质中电位移矢量和电场强度的分布；
2. 该电容器的电容.



解

1. 根据介质中的高斯定理得到 $D=\dfrac{\lambda}{2\pi r}=\dfrac{Q}{2\pi Lr}$，方向沿径向向外

   第一层介质（$R_1\le r\le R$）中的 $E_1=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 Lr}$，方向沿径向向外

   第二层介质（$R<r\le R_2$）中的 $E_2=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 Lr}$，方向沿径向向外

2. 计算两极板间的电势差 $U=\displaystyle\int_{R_1}^{R}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 Lr}\mathrm{d}r+\int_{R}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 Lr}\mathrm{d}r=\frac{Q(\ln\frac{R}{R_1}+2\ln\frac{R_2}{R})}{8\pi\varepsilon_0 L}$

   $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{8\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R}{R_1}+2\ln\frac{R_2}{R}}$

✍ **练习 1.6** 一平行板电容器始终与电压一定的电源相联. 当电容器两极板间为真空时，电场强度为 $\vec{E}_0$，电位移为 $\vec{D}_0$，而当两极板间充满相对介电常量为 ε_r 的各向同性均匀电介质时，电场强度为 $\vec{E}$，电位移为 $\vec{D}$，则（　）.

A. $\vec{E}=\vec{E}_0/\varepsilon_r$，$\vec{D}=\vec{D}_0$

B. $\vec{E}=\vec{E}_0$，$\vec{D}=\varepsilon_r\vec{D}_0$

C. $\vec{E}=\vec{E}_0/\varepsilon_r$，$\vec{D}=\vec{D}_0/\varepsilon_r$

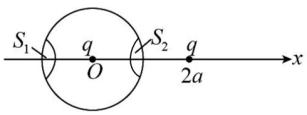
D. $\vec{E}=\vec{E}_0$，$\vec{D}=\vec{D}_0$

解 B

由于电压不变，则 $E=\dfrac{V}{d}$ 不变

$D=\varepsilon_0\varepsilon_r E$，得到 B 选项

✍ **练习 1.7** 有两个电量都是 $+q$ 的点电荷，相距为 $2a$. 今以左边的点电荷所在处为球心，以 a 为半径作一球形高斯面. 在球面上取两块相等的小面积 S_1 和 S_2（法向正方向指向凸面），其位置如图所示. 设通过 S_1 和 S_2 的电场强度通量分别为 ϕ_1 和 ϕ_2，通过整个球面的电场强度通量为 ϕ，则（　）.



A. $\phi_1>\phi_2$，$\phi_x=q/\varepsilon_0$

B. $\phi_1<\phi_2$，$\phi_x=q/\varepsilon_0$

C. $\phi_1<\phi_2$，$\phi_x=3q/\varepsilon_0$

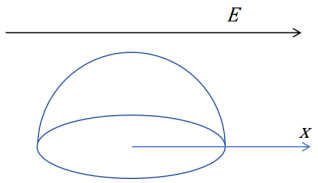
D. $\phi_1<\phi_2$，$\phi_x=2q/\varepsilon_0$

解 A

根据高斯定理得到，$\phi_x = q/\varepsilon_0$

通过 S_2 的电场强度通量为两电荷产生的场强相减再乘面积，通过 S_1 的电场强度通量为两电荷产生的场强相加再乘面积，所以 $\phi_1 > \phi_2$

练习 1.8 一半径为 R 的半球面放在场强为 E 的均匀电场中，E 的方向与位于半球面的水平投影面上的 x 轴平行，如图，则通过这一半球面的电通量为（　）.



A. $\frac{2}{3}\pi R^3 E$

B. $2\pi R^2 E$

C. $\pi R^2 E$

D. 0

解 D

电场线穿入穿出，总和为 0

练习 1.9 如图所示，长为 l 的细直线 OA 的带电线密度为 λ，求：

1. 当 λ 为常量且 $\lambda > 0$ 时，在 x 轴上距 O 点为 b 的 P 点的电场强度；
2. 当 $\lambda = kx$ （$0 \le x \le l$，k 为大于 0 的常量）时，P 点的电场强度.



解

1. $E = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x+b)^2} = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 b(b+l)}$，方向沿 x 负向
2. $E = \int_0^l \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (x+b)^2} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}(\ln\frac{l+b}{b} - \frac{l}{b+l})$，方向沿 x 负向

练习 1.10 有两个等量的点电荷，相距为 $2a$，分别带电 $+Q$，在这两个点电荷连线的垂直平分线上，具有最大电场强度的点到两点电荷中心的距离是（　）.

A. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

B. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}a$

C. $r = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

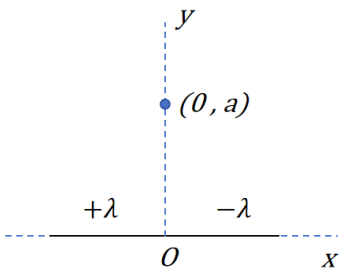
D. $r = \sqrt{2}a$

解 A

设距离为 r，则 $E = \frac{2kQr}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

计算得到 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 电场强度取极大值

练习 1.11 图中所示为一沿 x 轴放置的“无限长”分段均匀带电直线，电荷线密度分别为 $+\lambda(x<0)$ 和 $-\lambda(x>0)$，则 Oxy 坐标平面上点 $(0,a)$ 处的电场强度为（　　）.



A. 0

B. $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{i}$

C. $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{j}$

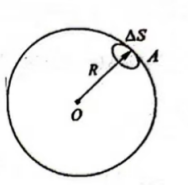
D. $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\hat{i}$

解 B

由于对称性，可以看出 y 方向场强分量相互抵消，所以 y 方向合场强为 0

$$\vec{E}=2\int_0^{\infty}\frac{\lambda x\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{i}$$

练习 1.12 真空中一半径为 R 的均匀带电球面，总电量为 $q(q>0)$. 现在球面上挖去非常小的一块面积 ΔS（连同电荷），且假设不影响原来的电荷分布，如图所示. 则挖去后球心处的电场强度大小为_____，方向为_____.

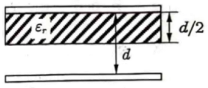


解 $E=\dfrac{\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$，方向沿径向由球心指向挖去部分

由于整个球面内部场强为 0，所以剩余部分对球心处产生的场强与挖去部分产生的场强等大反向

$$E=\frac{\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

练习 1.13 平行板电容器的极板 A 和极板 B 面积均为 S，相距为 d；电介质的相对介电常数为 ε_r，介质的厚度和位置如图所示，则此电容器的电容为_____.



解 $C=\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d(\varepsilon_r+1)}$

相当于两个电容串联（电容串并联公式与电阻串并联公式正好相反）

$C_1=\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}, C_2=\dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}$

$C=\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d(\varepsilon_r+1)}$

1.5 模型梳理

平行板类问题

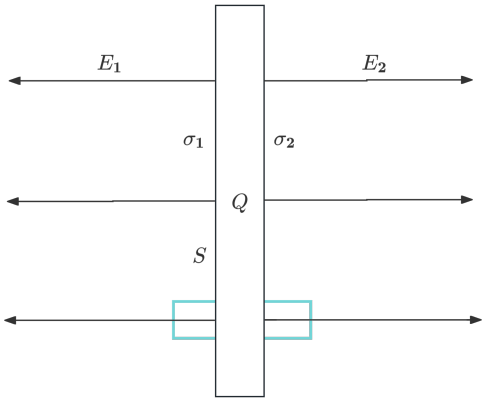
在作业题和考试题中，平行板类问题常常作为难点问题出现. 我们在此讲一些处理平行板问题的基本方法和二级结论.

1.5.1 基本方法

在处理无限大带电平板中，主要有两种题型：高斯定理计算电场和接地情况下计算电势.

高斯定理

如图，有一个无限大的、带电为 Q 的导体平板：



由对称性可知，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$，$E_1=E_2=E$，

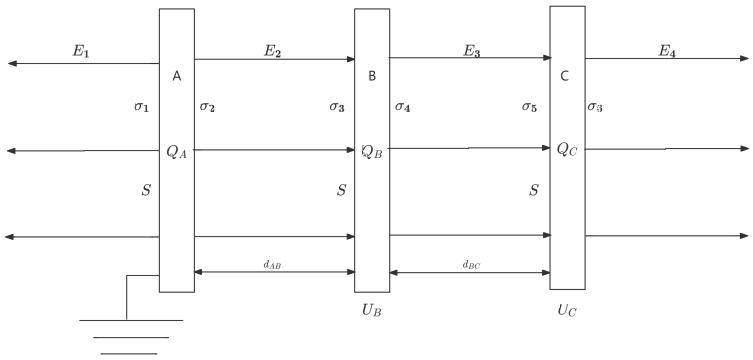
取如图中蓝框所示的高斯面，易得：

$$E=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

一定要牢记这个公式，搞清楚什么时候分母上有 2.

电势计算

由于电势的计算需要一个势能零点作为基准，因此在所有平行板类型的势能计算题目中，都会存在一个接地的平板. 我们以下面这个情景为例，来学习在此类问题中计算电势的一般方法：



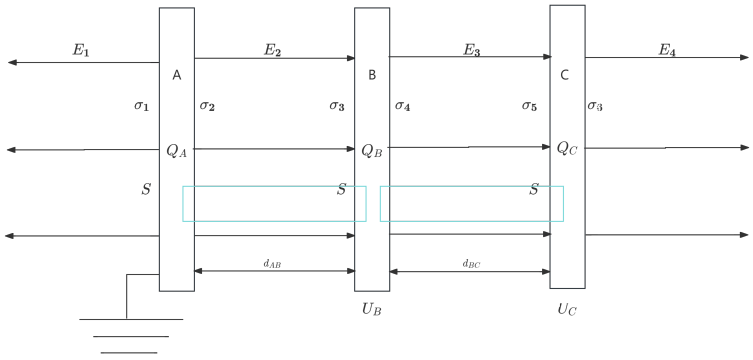
如图，极板 A 接地，如果我们已经计算出了各个极板间的电场，那么按照图中电场正方向的规定，U_B、U_C 可以表示如下：

$$U_B = -E_2 d_{AB} \quad U_C = -(E_2 d_{AB} + E_3 d_{BC})$$

在实际问题中，表示出某一极板的电势往往是解题的关键，而在计算的过程中，不可避免的需要计算极板间的电场. 因此，在下面的部分中，我们将着重讨论如何快速正确地确定极板各个表面的电荷面密度，进而计算出场强.

1.5.2 二级结论

两极板相对面的电荷面密度等大异号

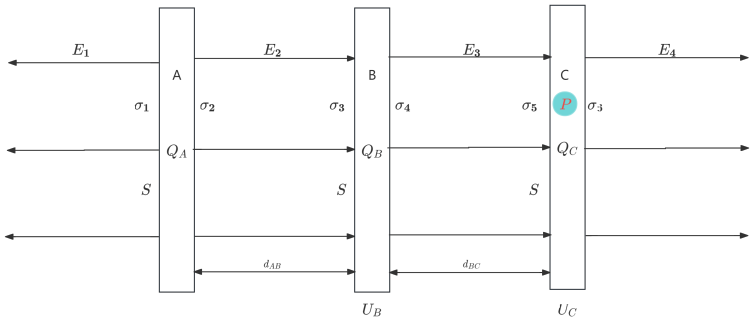


构造如图所示的高斯面，由于导体板内部无电场，因此高斯面内部净电荷为零，即：

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 + \sigma_5 = 0$$

所以，两极板相对面的电荷面密度等大异号.

整个极板体系最外侧两表面电荷面密度等大同号



如图，对处于极板 C 内部的一点 P 进行分析，计算它的电场：

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_5}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_6}{2\varepsilon_0}$$

这里使用了无限大带电平板产生电场的公式，分别计算了每个地方的电荷对 P 点产生的场强，然后将其叠加.

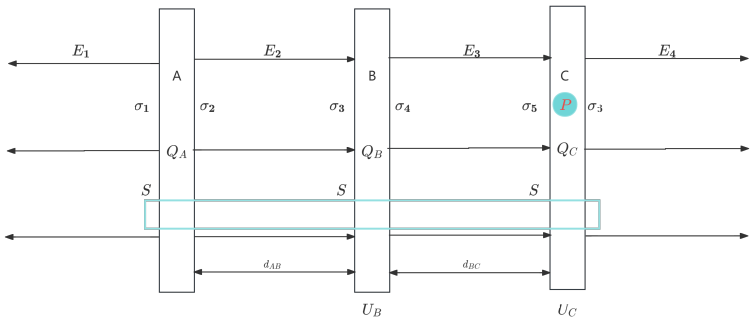
使用结论 1，并结合 $E_P = 0$，可以得到：

$$\sigma_1 = \sigma_6$$

因此：

$$E_1 = E_4 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_0}$$

再构造如图所示的高斯面：



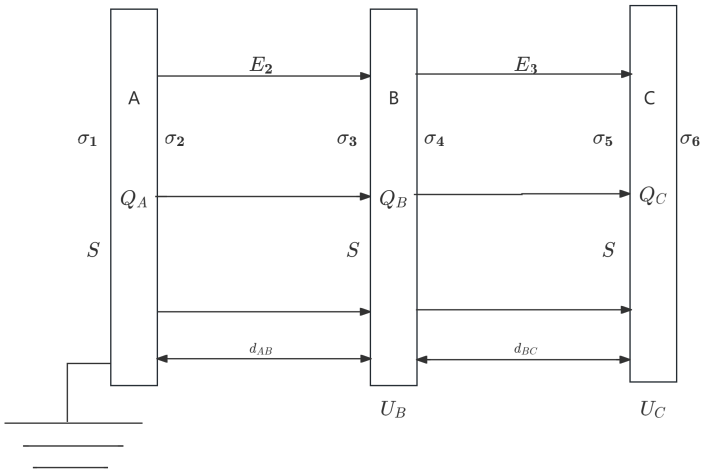
得到：

$$E_1 = E_4 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$

因此：

$$\sigma_1 = \sigma_6 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2S}$$

如果只有两个带电平板，那么两极板靠外侧的带电量将是两个极板总带电量的均值.



外侧平板接地，则最外侧表面无电荷分布

如图所示，将极板 A 接地. 因为极板 A 与无穷远处等势，所以 A 的外侧不应该发出指向无穷远处的电场线，因此 $E_1 = 0$，进而 $\sigma_1 = 0$，由结论 2 可得，$\sigma_6 = \sigma_1 = 0$.

至此，我们就证明了，在平行极板的体系中，如果有一个靠近外侧的极板接地，那么整个极板体系最外侧的两个表面无电荷分布.

将极板体系当做串联电容处理

两个以上的平行极板体系，可以看作是多个电容的串联，因此在表示电势降落时，可以使用公式：

$$U = \frac{Q}{C}$$

如果已知了电压关系，也可以使用 $Q = CU$ 来得到电荷量的关系.

以下图为例：

注意到，极板 AC 之间通过导线相连，因此 AC 极板等势，有：

$$U_{AB} = U_{CB}$$

设 AB、BC 间电容分别为 C_{AB}、C_{BC}，注意到电容与极板间间距成反比，因此：

$$\frac{C_{AB}}{C_{BC}} = \frac{d_{BC}}{d_{AB}}$$

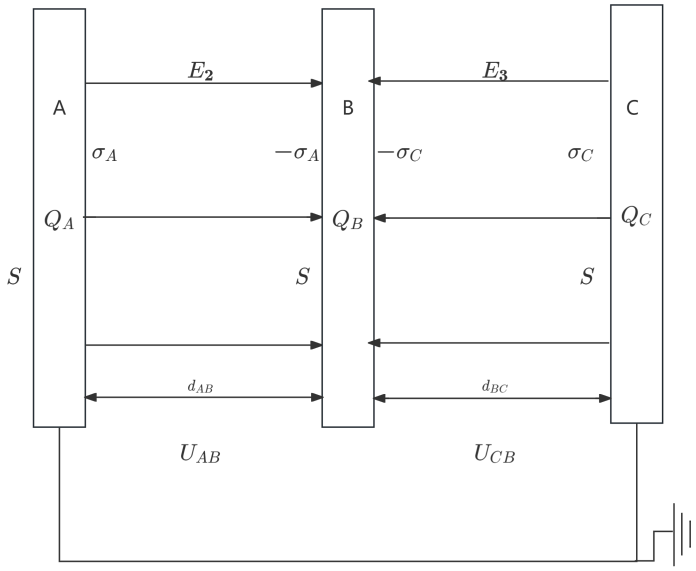
结合等势关系，得到极板带电量与电容成正比：

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_C} = \frac{C_{AB}}{C_{BC}}$$

最终得到：

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_C} = \frac{d_{BC}}{d_{AB}}$$

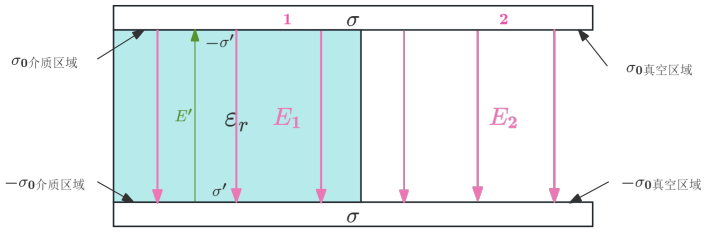
即带电量与极板间距离成反比.



两种带电介质的平行板模型

1. **电场强度均匀分布的情况**

   如图，一块厚度等于两极板间距，但横截面小于极板截面的电介质平板填充在两极板间，其相对介电常数为 ε_r.



   对于每个金属极板，其表面都是等势的. 在极板上任找两点 1、2，这两处的电势差相等. 由于两极板平行，因此 1、2 处的间距也相等，推得 1、2 间的电场强度相等. 由于 1、2 的选取是任意的，因此在这种情况下，极板间的电场是匀强场. 换句话说，在极板上，总电荷是均匀分布的.

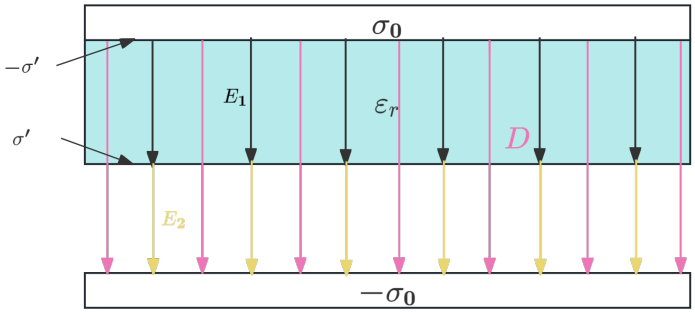
   但是，需要注意的是，自由电荷不是均匀分布的，因为在存在电介质的部分，电介质上会有与极板异号的极化电荷. 在这些区域，为了保证总电荷与无电介质区域相等，自由电荷就会更多地分布，定量的说，有如下关系：

$$\sigma_0\text{介质区域} - \sigma' = \sigma_0\text{真空区域}$$

   如果在此时撤去电介质，自由电荷就会从原先有介质的区域向真空区域转移.

2. **电位移矢量均匀分布的情况**

   如图，一块厚度小于两极板间距，但横截面等于极板横截面的电介质平板填充在两极板间，其相对介电常数为 ε_r.



由于自由电荷只分布在导体极板上，极板间只存在极化电荷，因此在两极板间，电位移矢量 $\vec{D}$ 是均匀分布的. 此时要计算电场强度，只需要先求出匀强的 $\vec{D}$，再使用公式 $\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{D}$ 就能算出各处的电场强度了.

第 2 章 磁场

2.1 引言

在大学物理的学习中，磁场是一个重要的知识点，它贯穿于电磁学的多个章节，是理解电磁现象的关键基础. 磁场虽然看不见、摸不着，但它的存在和作用却无处不在，从微观粒子的运动到宏观电磁设备的运行，都离不开磁场的参与. 磁场的基本概念和性质是学习的重点，包括磁感应强度的求解、磁通量等重要物理量的定义和计算. 同时，磁场对运动电荷和电流的作用规律也是需要重点掌握的内容. 这些知识点在理论上有重要意义. 复习磁场部分时，我们需要从基础概念入手，逐步深入理解磁场的性质和规律. 通过大量的练习和总结，将这些知识点融会贯通，形成完整的知识体系. 希望这份复习笔记能够帮助大家更好地梳理磁场的知识点，为考试做好充分的准备.

2.2 考情分析

在考察上，尽管存在一些极其晦涩难懂的知识点（磁化），但考察的侧重点仍是求解磁场分布，进而求解磁通量、受力（安培力、洛伦兹力），更进一步的力矩，所以同学们的复习重点应该放在比奥-萨伐尔定律和安培环路定律，理解磁场、磁通量等基本知识，掌握磁场的合成、叠加，许多问题即可迎刃而解.

2.3 概念剖析

2.3.1 磁场的概念，特点

定义

电流之间的作用不是超距作用，它是通过磁场来传递的. 电流、运动电荷、磁体或变化电场周围空间存在的一种特殊形态的物质——磁场. 由于磁体的磁性来源于电流，电流是电荷的运动产生的，因而概括地说，磁场是由运动电荷或电场的变化而产生的，用 $\vec{B}$ 表示.

特点

磁场与电场不同，磁场是一个无源有旋场.

无源：对磁场的高斯定理，有

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

散度为零意味着磁场没有“源头”或“汇”. 换句话说，磁场线不会在空间中开始或结束，它们总是闭合的. 这与电场不同，电场有电荷作为源头和汇（正电荷产生电场线，负电荷汇聚电场线）

有旋：旋度不为零意味着磁场线在空间中是“旋转”的. 磁场线不是直线，而是形成闭合的环路或螺旋线.

2.3.2 B-S 定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

这就是电流元 $I\mathrm{d}l$ 在空间任一点 $\vec{r}$ 处所产生的磁感应强度，此式即为毕奥-萨伐尔定律. 此定律更为普遍适用，可以解决任意形状电流产生的磁场，但计算难度会偏高.

2.3.3 安培环路定律

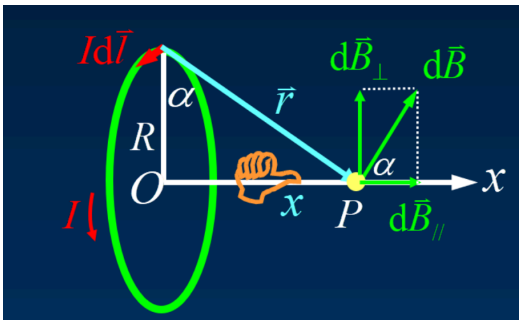
$$\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I_{\text{围}}$$

$I_{\text{围}}$ 表示闭合路径所包围的总电流

该定律类似于利用高斯定理求解电场，经常在所求解磁场存在对称性时使用安培环路定理来简化计算.

2.3.4 磁场模型

载流圆环轴线上的磁场



由对称性，$\vec{B}$ 沿轴线方向.

对 $\mathrm{d}l$ 电流元，有

$$\mathrm{d}\vec{B}_{\parallel}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{i}$$

积分有

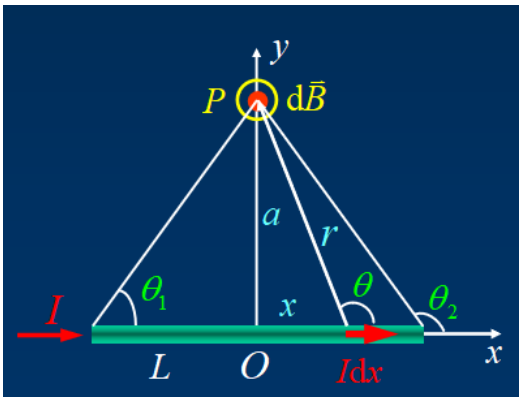
$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}_{\parallel}=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\hat{i}}{(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}l$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 IR^2\hat{i}}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

对于 $x=0$ 处

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I\hat{i}}{2R}$$

无限长载流直导线



法一：B-S 定律

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I\sin\theta\mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_L\frac{\mu_0 I\sin\theta\mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

根据几何关系 $x=a\cot(\pi-\theta)=-a\cot\theta$

$$\mathrm{d}x=\frac{a}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$r=\frac{a}{\sin\theta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

无限长直导线 $\theta_1\to 0\quad \theta_2\to\pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\quad \text{方向：右螺旋法则}$$

法二：安培定律

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{内}$$

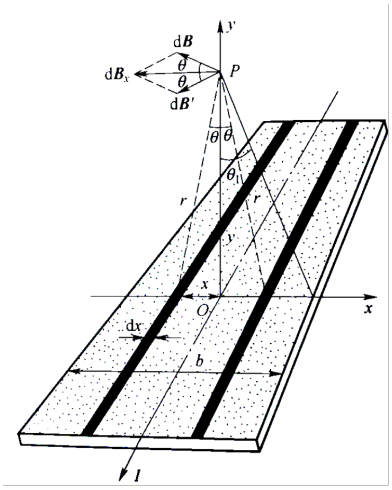
对于无限长直载流导线，我们可以选择一个以导线为中心，半径为 r 的圆形路径来进行计算. 由于磁场 $\vec{B}$ 在这个圆形路径上的大小是常数，并且方向始终与路径切线垂直，因此线积分可以简化为：

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

得到磁场的表达式：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

无限长载流平板



设有一块无限长的金属平板，其宽度为 b，厚度可忽略不计，其上均匀地通有电流 I. 坐标系的选择如图所示. 试求无限长载流平板中线正上方直距离为 y 处 P 点的磁感应强度 B.

为了方便地求解该题，可把无限长载流平板分成许多宽度为 $\mathrm{d}x$ 的无限长细条，每根细条可看成电流为 $\mathrm{d}I = \dfrac{I\mathrm{d}x}{b}$ 的无限长载流直导线. 它们在 P 点产生的磁感应强度的 $\mathrm{d}B$ 的大小为：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}l}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi b y \sec\theta}$$

$\mathrm{d}B$ 的方向与位矢 r 垂直，如图所示. 不同位置的细条在 P 点产生的磁感应强度 $\mathrm{d}B$ 不同. 因此，需将 $\mathrm{d}B$ 分解为沿 x 轴和沿 y 轴的两个分量 $\mathrm{d}B_x$ 和 $\mathrm{d}B_y$，然后分别进行积分运算. 由对称性分析可知，与原点对称位置处的任意两细条在 P 点产生的磁感应强度 $\mathrm{d}B$ 沿 y 轴的分量互相抵消，故 P 点的总磁感应强度由各细条产生的磁感应强度 $\mathrm{d}B$ 沿 x 分量的代数和确定. 即：

$$B_p = B_x = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B\cos\theta = 2\int_0^{\theta_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi b y \sec^2\theta}\mathrm{d}x$$

由图示可知：

$$x = y\tan\theta, \quad \mathrm{d}x = y\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$$

代入上式，可得：

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi b}\int_0^{\theta_1}\mathrm{d}\theta$$

因为：

$$\theta_1 = \arctan\frac{b}{2y}$$

所以：

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{b}{2y}$$

(1) 如果 $y \gg b$，即 P 点离无限长载流平板很远，这时 θ_1 角很小，$\arctan\theta \approx \theta$，$\arctan\dfrac{b}{2y} \approx \dfrac{b}{2y}$ 则：

$$B_p \approx \frac{\mu_0 I b}{2\pi b y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

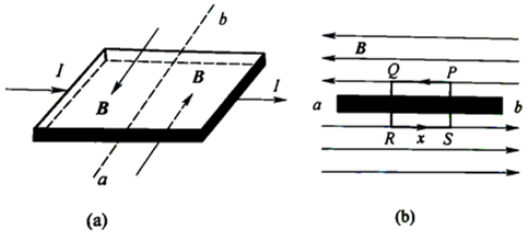
这个结果相当于无限长载流直导线.

(2) 如果 $b \gg y$，即 P 点离无限长载流平板很近，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ 则：

$$B_p \approx \frac{\mu_0 I\pi}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

这时，载流平板在其附近产生的磁场为一匀强磁场.

无限大载流平板



假设有一个无限大的平板，其上均匀分布着电流，设单位宽度上流过电流为 J. 我们需要计算平板上方或下方某点的磁场.

法一：B-S 定律，同 3.4.4 的近似（2）

法二：安培定律

根据题设的对称性，可知无限大载流薄平板周围的磁感应强度方向垂直于板面，并垂直于电流方向. 图 (b) 中电流方向垂直纸面向外，取矩形闭合路径 P-Q-R-S-P 为闭合积分路径，使

PQ 边平行于 ab，使积分环绕方向与电流方向间满足右手螺旋定则. 应用安培环路定理，可得：

$$\oint_c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^Q \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_Q^R \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_S^P \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2Bx$$

闭合路径包围的总电流为 $I_{总}$，则：

$$I_{总} = Jx$$

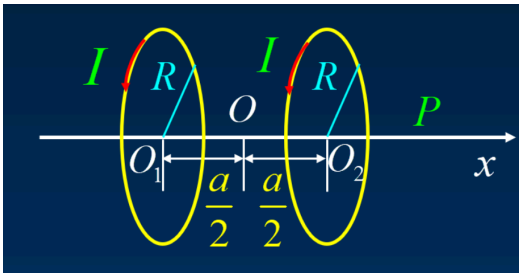
$$2Bx = \mu_0 I_{总}$$

得：

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 J$$

可见，无限大载流薄平板在其两侧产生匀强磁场，且两侧磁感应强度 B 的大小相等，方向相反.

亥姆霍兹线圈



$$B = B_1 + B_2 = B(x)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

当 $a = R$ 时，在两线圈之间，磁感应强度近似均匀

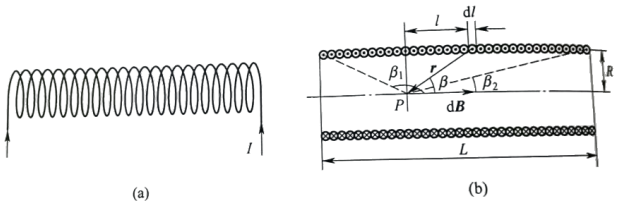
载流螺线管轴线上的磁场

磁感应强度增量公式：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 n I \mathrm{d}l}{4\pi r^2} 2\pi R \sin\beta = \frac{\mu_0 R^2 n I \mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

由几何关系得：

$$l = R\cot\beta, \quad \mathrm{d}l = -R\csc^2\beta \mathrm{d}\beta, \quad R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta$$



使用 β 换元后的 $\mathrm{d}B$ 为：

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0}{2} nI \sin\beta \mathrm{d}\beta$$

磁感应强度 B 的计算公式：

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0}{2} nI \sin\beta \mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

当载流螺线管可以近似为“无限长”时，即 $L \gg R$，有：

$$B = \mu_0 nI$$

在“半无限长”载流螺线管轴线上的端点处，当 $\beta_1 \to \pi/2, \beta_2 \to \pi/2$ 时：

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0 nI}{2}(1-0) = \frac{\mu_0 nI}{2}$$

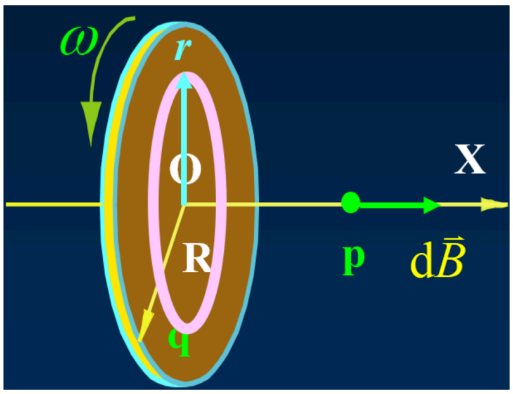
当 $\beta_1 \to \pi, \beta_2 \to \pi/2$ 时：

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi) = \frac{\mu_0 nI}{2}(0-(-1)) = \frac{\mu_0 nI}{2}$$

这两种情况都表明，在“半无限长”载流螺线管轴线上的端点处，磁感应强度 B 为：

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}$$

旋转带电圆盘轴线上



圆盘上的电荷面密度 σ 为：

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

取环状微元，则每个微元的带电量为：

$$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

利用电流定义式，表达出每一个微元的电流：

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r}{2\pi/\omega} = \omega\sigma r \mathrm{d}r$$

每一个微元产生的磁场用载流圆环磁场公式写出：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 r^2 \mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma\omega r^3 \mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

积分得：

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{x^2+R^2}} - 2x\right]$$

2.3.5 磁通量

磁通量是描述磁场穿过某一面积的物理量. 它定义为磁场 $\vec{B}$ 与面积向量 $\vec{S}$ 的点积，即：

$$\Phi_B = \iint_\sigma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

磁通量的正负取决于磁场和面积的相对方向. 如果均匀磁场垂直穿过某一平面，磁通量的计算最为简单：

$$\Phi_B = |\vec{B}||\vec{S}|$$

如果磁场与面积不垂直，需要考虑磁场在面积上的投影，即：

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\cdot \mathrm{d}S\cdot\cos\theta$$

其中 θ 是磁场方向与面积法线之间的夹角.

2.3.6 安培力和洛伦兹力（配速法）

安培力

在电磁学中，当考虑一段导线在磁场中受到的安培力时，如果导线是弯曲的或者磁场不是均匀的，我们可能需要对整个导线上的力进行积分. 这种情况下，安培力的积分形式为：

$$\vec{F} = \int_C I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

可使用右手螺旋定则来判断安培力的方向.

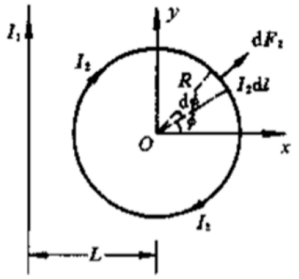
例题 2.1 如图所示，无限长直导线中载有电流 I_1，在它旁边的半径为 R 的圆形线圈中载有电流 I_2. 长直导线与圆线圈在同一平面内，圆心到长直导线的距离为 L，两电流的方向如图所示，试求圆线圈对长直导线的作用力.

解

利用牛顿第三定律计算长直导线对圆环的作用力.

如图所示，在圆线圈中任取电流为 $I_2\mathrm{d}l$，它所受安培力 $\mathrm{d}F_2$ 的方向沿径向外，其大小为

$$\mathrm{d}F_2 = I_2\mathrm{d}lB = I_2R\mathrm{d}\Phi\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(L+R\cos\Phi)}$$



$\mathrm{d}F_2$ 的 x 分量为

$$\mathrm{d}F_{2x} = \mathrm{d}F_2 \cos\Phi = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos\Phi}{2\pi(L + R\cos\Phi)}\mathrm{d}\Phi$$

由于对称性，各个 $\mathrm{d}F_2$ 的 y 分量之和为零（无 z 分量），故圆线圈所受作用力为

$$F_2 = F_{2x} = \int \mathrm{d}F_{2x} = \frac{2\mu_0 I_1 I_2 R^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\Phi}{L + R\cos\Phi}\mathrm{d}\Phi$$

式中

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\Phi \mathrm{d}\Phi}{L + R\cos\Phi} = \frac{\pi}{L}\left[\frac{L}{R} - \frac{2}{\sqrt{L^2 - R^2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{L-R}{L+R}}\tan\frac{\Phi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)$$

代入，得

$$F_2 = F_{2x} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)$$

因

$$L > \sqrt{L^2 - R^2}$$

故

$$F_2 < 0$$

即

$$F_1 = -F_2 = \mu_0 I_1 I_2 \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} - 1\right)\hat{i}$$

$\hat{i}$ 同向，指向圆线圈，为吸引力.

洛伦兹力

载流导线受到的安培力，可看为是磁场作用于运动电荷的力，由安培定律 $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$，而电流强度与运动电荷有关 $I = qnvS, \theta$ 既是电流元和磁场夹角，也是 $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角，L 长导线中的粒子数 $N = nLS$, 则每个粒子受到的力即洛伦兹力为

$$f = \frac{F}{N} = qvB\sin\theta$$

即

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

可见，洛伦兹力总是与运动方向垂直，只改变电荷运动的速度方向. 其余圆周运动相关公式一并给出.

向心力公式：

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

轨道半径公式：

$$R = \frac{mv}{Bq}$$

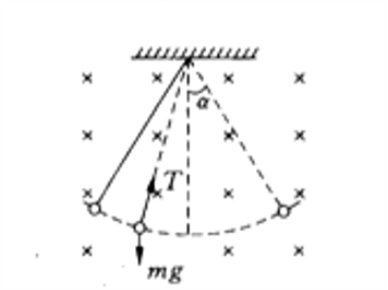
周期、频率和角频率公式，即：

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{Bq}{2\pi m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{Bq}{m}$$

动能公式：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(BqR)^2}{2m}$$

例题 2.2 如图所示，单摆的摆长为 L，摆球带正电 q，放在匀强磁场中，摆球摆动的平面跟磁场垂直，最大摆角为 α，为使此摆能正常摆动，磁感应强度 B 的值有何限制？



解

设在 θ 时有：

$$mgL(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (F_{洛}\text{不做功})$$

$$T = mg\cos\theta - qvB + \frac{mv^2}{L}$$

即：

$$T = mg\cos\theta - qB\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\alpha)} + 2mg(\cos\theta - \cos\alpha)$$

则取 T 的极值点：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\cos\theta} = 0 \quad \text{得} \quad \cos\theta = \cos\alpha + \frac{q^2B^2L}{18mg^2}$$

代入有：

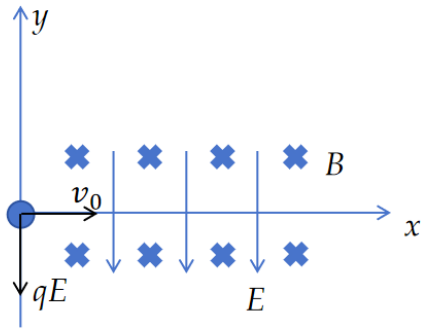
$$T = mg\cos\alpha - \frac{q^2B^2L}{6mg}$$

又因为限制条件 $T \geq 0$，则：

$$B \leq \frac{m}{q}\sqrt{\frac{6g\cos\alpha}{L}}$$

配速法

如图，一小球位于坐标原点 m, q 已知，位于存在相互垂直的电磁场 B, E 中，有一初始向右速度 v_0，求出其运动方程.（忽略小球重力）



由牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB}{m}v_y$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}v_x - \frac{Eq}{m}$$

解该微分方程组并代入初始条件 $x_0 = y_0 = 0, v_{x0} = v_0$ 得

$$v_x = \frac{v_0B - E}{B}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}$$
$$v_y = -\frac{E - v_0B}{B}\sin\frac{qB}{m}t$$
$$x = \frac{mv_0B - mE}{qB^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t$$
$$y = \frac{mE - mv_0B}{qB^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)$$

实际上，观察这个微分方程我们可以发现，如果我们令 $v_x' = v_x - \frac{E}{B}$，则原微分方程就可以改为：

$$\frac{\mathrm{d}v_x'}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB}{m}v_y$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}v_x'$$

我们可以很容易得解出这个微分方程，它的解是一个线速度为 $v_{圆周} = v_0 - \dfrac{E}{B}$ 的圆周运动.

现在来看 $v_{圆周}$ 的第二项 $-\dfrac{E}{B}$，注意到，如果这个速度指向 x 的正向，那么由这个速度产生的洛伦兹力刚好与电场力大小相等、方向相反.

这并不是一种巧合，要想解释它，就让我们从头来分析这个问题.

如果空间中没有电场，那么这个小球的运动将非常简单——匀速圆周运动. 既然是电场让运动变得复杂，那么我们就尝试使用某种方法来排除电场的影响.

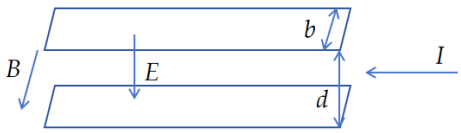


如图所示，如果我们将小球的初速度拆分为两项，一项是 $\vec{v_{配}}$，另一项是 $\vec{v_0} - \vec{v_{配}}$，并且令 $\vec{v_{配}}$ 的大小为 $\dfrac{E}{B}$，方向指向 x 轴正向，那么由 $\vec{v_{配}}$ 产生的洛伦兹力就会抵消掉电场力，小球的总运动就被拆分成了一个速度为 $\vec{v_{配}}$ 的匀速直线运动. 此时，剩下的运动就不再受电场力影响，在磁场中以 $v_{圆周} = \dfrac{v_0 B - E}{B}$ 作匀速圆周运动.

最后，综合考虑两个运动，小球实际的运动为：一边以 $\vec{v_{配}}$ 做匀速直线运动，一边以 $v_{圆周}$ 做匀速圆周运动，运动轨迹是一个摆线.

霍尔效应

霍尔效应是电流与磁场产生作用后，在极板间产生电动势的一种效应.



如图，由于电荷受洛伦兹力的作用，偏转后打到极板上产生电势差，当洛伦兹力与电场力大小相等时，电势差即霍尔电压

$$E = \frac{U_H}{d}$$
$$Eq = Bqv$$

$$U_H = Bdv$$

而 $I = nqSv, S = bd$

$$U_H = \frac{BI}{nqd}$$

2.3.7 公式大杂烩（磁场）

描述	公式
毕奥-萨伐尔定律	$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$
安培环路定理	$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{围}}$
高斯定律（磁）	$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$
载流直线产生的磁场	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
载流圆环产生的磁场	$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$
载流螺线管产生的磁场	$B = \mu_0 nI$
磁感应强度与磁通量的关系	$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S}$
磁矩	$\vec{\mu} = I\vec{S}$
安培力	$\vec{F} = \int_C I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$
洛伦兹力（磁力）	$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$
磁力矩	$\tau = \vec{\mu}\times\vec{B}$

这些公式涵盖了磁场的基本概念和计算方法，包括电流元、直导线、圆环、螺线管等产生的磁场，以及磁场与磁通量、磁矩、磁力和磁力矩的关系.

2.4 真题演绎

✍ **练习 2.1** 正方形导线框边长为 a，通有电流 I，求正方形中心磁场强度与 a 的关系（　）.

A. $\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$

B. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$

C. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$

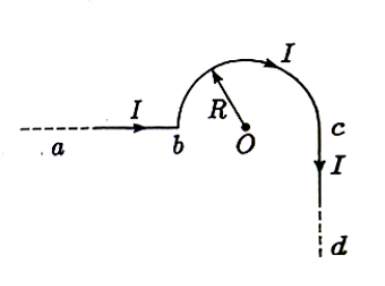
D. $\frac{2\mu_0 I}{\pi a}$

解 **A**

四条有限长直导线产生的磁场进行叠加 $B = 4\times\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$

✍ **练习 2.2** 一根无限长的载流导线被弯曲成如图所示形状，其中 bc 段是半径为 R 的光圆弧，ab 段沿半径方向，cd 段与 ab 段垂直. 若导线中的电流强度为 I，则半圆弧圆心处的磁感应强度

的大小为（　）.

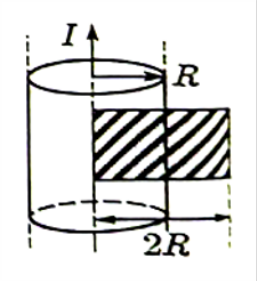


A. $\dfrac{\mu_0 I}{4R}-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$
B. $\dfrac{\mu_0 I}{4R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$
C. $\dfrac{\mu_0 I}{4R}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$
D. $\dfrac{\mu_0 I}{2R}+\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$

解 **B**

将半圆弧段和右侧半无限长直导线段产生的磁场叠加.

✍ **练习 2.3** 一半径为 R 的无限长圆柱形导体（相对磁导率为 μ_r），通有沿轴线方向的电流，电流强度为 I，且电流在其横截面上均匀分布. 今取一矩形平面 S（长为 1m，宽为 $2R$），位置如右图中阴影部分所示，则通过该矩形平面的磁通量为 _____.



解

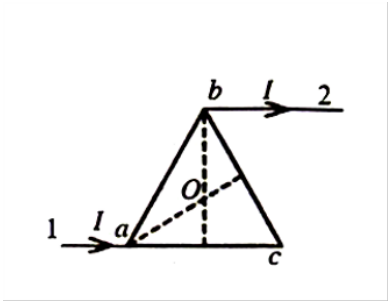
由安培环路定理得:

$$B_{内}=\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi R^2}r$$

$$B_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi=\int_0^R\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi R^2}r\mathrm{d}r+\int_R^{2R}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\mu_r I}{4\pi}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 2$$

✍ **练习 2.4** 边长为 l，电阻均匀的导线构成的正三角形导线 abc，通过彼此平行的长直导线 1 和 2 与电源相连，导线 1 和 2 分别与导线框在 a 点和 b 点相接；导线 1 和线框的 ac 边的延长线重合. 导线 1 和 2 上的电流为 I，如图所示. 令长直导线 1、2 和导线框中电流在线框中心 O 点产生的磁感应强度分别为 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 和 $\vec{B}_3$，则 O 点的磁感应强度大小为（　）.



A. $B=0$，因为 $B_1=B_2=B_3=0$

B. $B=0$，因为 $\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$，$B_3=0$

C. $B\neq 0$，因为虽然 $\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$，但 $B_3\neq 0$

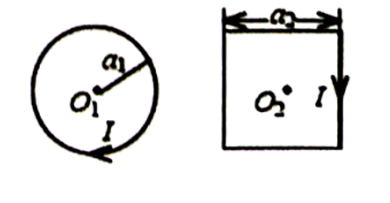
D. $B\neq 0$，因为虽然 $B_3=0$，但 $\vec{B}_1+\vec{B}_2\neq 0$

解 D

由于 ab 段电流是 acb 段电流的 2 倍，叠加得 $B_3=0$

再根据公式计算 B_1+B_2，得到 D 选项.

✍ **练习 2.5** 半径为 a_1 的载流圆形线圈与边长为 a_2 的方形载流线圈，通有相同的电流，若两线圈中心 O_1 和 O_2 的磁感应强度大小相同，则半径与边长之比 $a_1:a_2$ 为（　）.



A. $1:1$

B. $\sqrt{2}\pi:1$

C. $\sqrt{2}\pi:4$

D. $\sqrt{2}\pi:8$

解 D

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2a_1},B_2=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a_2}$$

因为 $B_1=B_2$，所以 $a_1:a_2=\sqrt{2}\pi:8$

✍ **练习 2.6** 半径为 r 的导线圆环中载有电流 I，置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，若磁场方向与环面垂直，则圆环所受的合力为 _____，力矩为 _____.

解 0，$BI\pi r^2$

✍ **练习 2.7** 磁场的高斯定理 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 说明了下面表述正确的是：（　）.

A. 穿入闭合曲面 S 的磁感应线条数必然等于穿出的磁感应线条数；

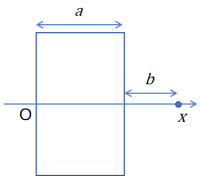
B. 穿入闭合曲面 S 的磁感应线条数不等于穿出的磁感应线条数；

C. 一根磁感应线可以终止在闭合曲面 S 内；

D. 一根磁感应线不可能完全处于闭合曲面 S 内

解 A

✍ **练习 2.8** 如图所示，有一无限长通有电流的薄平直铜片，宽度为 a，厚度不计，电流 I 在铜片上均匀分布，在铜片外与铜片共面，离铜片右边缘为 b 处的 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小为：（　）.



A. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$

B. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}$

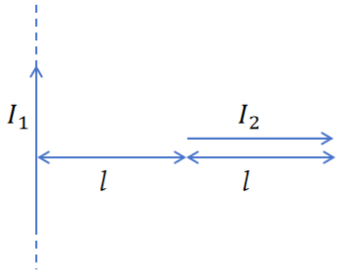
C. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\dfrac{a+b}{a}$

D. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a(a/2+b)}$

解 B

使用微元法进行分析 $B=\displaystyle\int_0^a \frac{\mu_0\frac{I}{a}\mathrm{d}x}{2\pi(a+b-x)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$

✍ **练习 2.9** 如图所示，一无限长直导线 L_1 载有电流 I_1，旁边有与它垂直且共面的一段导线 L_2，L_2 长为 l，载有电流 I_2，靠近 L_1 的一端到 L_1 的距离也是 l，试求：L_1 上的电流作用在 L_2 上的力的大小及方向.



解

使用微元法分析 $F=\displaystyle\int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(l+x)}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 2$

根据右手定则判断方向，作用在 L_2 上的力方向沿 I_1 方向.

第 3 章 电磁感应

3.1 引言

电磁感应是电磁学中的核心内容之一，它的研究对象由静电场和静磁场转化为了随时间变化的电磁场，以及由此产生的感应电动势、涡旋电场和感应电流. 这一部分知识在物理学中具有重要地位，不仅在理论体系中占据关键环节，也是许多现代科技应用的基础. 在学习电磁感应时，我们需要重点关注以下几个重要考点：法拉第电磁感应定律、楞次定律、自感互感、感应电动势计算，以及电磁场中的能量问题. 这些知识点相互关联，构成了电磁感应的基础框架，是理解和应用电磁学知识的关键.

3.2 考情速递

在以往的考试真题中，电磁感应的题目并不多，但基本上每一个知识点都有考到，包括求解电动势、涡旋电场以及进而引出的对一些简单电路问题的求解，还有自感互感，位移电流的简单知识运用. 希望大家能够理解感应电动势在电路分析中的应用方法，理解自感互感的求解，期末获得好成绩.

3.3 知识剖析

3.3.1 法拉第电磁感应定律

定义总述

法拉第电磁感应定律表述为：当通过闭合回路的磁通量 Φ 随时间发生变化时，回路中就有感应电动势产生，如果闭合回路可以导电，那么在回路中将产生感应电流.

感应电动势的大小与磁通量 Φ 的变化率有关，其与 Φ 随时间的变化率成正比. 感应电动势的方向总是企图由它产生的感应电流建立一个附加磁通量，以阻碍引起感应电动势的那个磁通量的变化，即：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

其中 Ψ 是全磁通，在存在线圈匝数为 N 时，有：

$$\Psi = N\Phi$$

负号的来源是楞次定律，即感应电流总是阻碍磁通量的变化.

感应电动势的产生并不依赖于电路是否闭合或回路是否由导线构成. 即使电路是断开的，只要磁通量发生变化，就会在电路中产生感应电动势. 不过，只有当电路闭合时，才会形成感

应电流. 注意，感应电动势产生的原因是磁通量的变化，与原来磁通量的大小无关.

此外，我们注意到，磁通量的表达式为:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

那么在考虑磁通量变化时，只需要考虑 $\vec{B}$ 和 $\vec{S}$ 的变化即可，即可将感应电动势看为穿过面积变化引起的动生电动势和磁场变化引起的感生电动势的叠加.

动生电动势

导体在不随时间改变的磁场内运动，因导体运动而产生的感应电动势，称为动生电动势. 表达式为:

$$\varepsilon = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

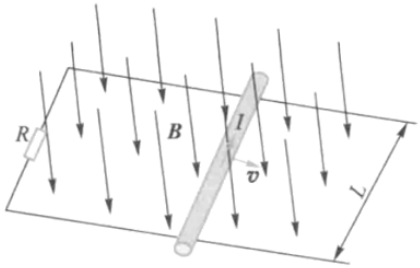
环路积分是在导体线框闭合的情况下，若只有一段导体运动，有:

$$\varepsilon = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

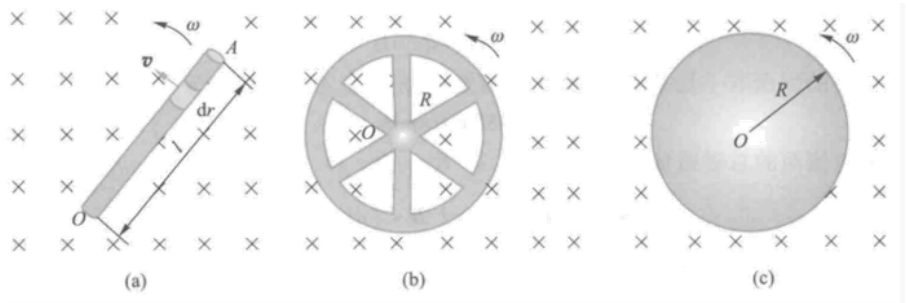
对于电动势方向，则使用右手螺旋定则进行判别.

对于最特殊的情况，导体平动，各向量均垂直，如下图所示，表达式可化简为:

$$\varepsilon = BLv$$



对于如下图所示的转动情况:



对于 (a) 图，利用积分式可以得到:

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = vB\mathrm{d}r = B\omega r\mathrm{d}r$$

$$\varepsilon = \int \mathrm{d}\varepsilon = \int_0^l B\omega r \mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega l^2$$

即导体棒两端电势差为：

$$U_O - U_A = \frac{1}{2}B\omega l^2$$

通过右手螺旋定则，可见 A 端电势低，O 端电势高.

而对于图 (b) 的类似自行车多根辐条的情况，每根单独分析都会产生相同大小的电动势，而每根辐条的两端都等势，可见这些辐条是并联关系. 与单根导体棒的区别在于，多根并联会使得等效的内阻也变为多个电阻并联后的电阻，同理图 (c) 的圆盘可理解为无数根辐条拼成，电动势大小不变，内阻的计算则涉及到恒定电流场的知识，这里不再讨论.

感生电动势

由磁场的变化而产生的电动势称为感生电动势，即：

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -N\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

特殊的，当磁场的分布与位置无关时，有：

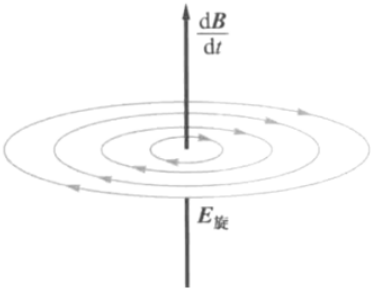
$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S\cos\theta$$

θ 是 B 与 S 法线的夹角.

涡旋电场及其电路分析

高中阶段我们就学过，电源产生电动势的原因是，在其内部，有非静电力对电荷做功. 那么我们不禁要问，产生感生电动势的非静电力是什么？麦克斯韦通过分析，提出变化的磁场在其周围空间会激发一种新的电场，称涡旋电场. 涡旋电场就是产生感生电动势的原因. 导体中的载流子在这种涡旋电场的作用下产生定向运动，就形成了电流.

跟静电场不同，涡旋电场是一种由磁场变化而产生的电场，并不是由电荷产生的，涡旋电场的电场线总是环绕着磁感应线，即它总是闭合的曲线. 如下图所示：



从带电粒子在电场中做功的行为看，带电粒子在涡旋电场中沿任意一条闭合曲线移动一周，电场力对带电粒子所做的功不为零，即：

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

这就说明了，涡旋电场是非保守场. 单位电荷的带电粒子在涡旋电场中运动一周，电场力所做的功就是回路中产生的感生电动势，即：

$$W = \oint_L \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon$$

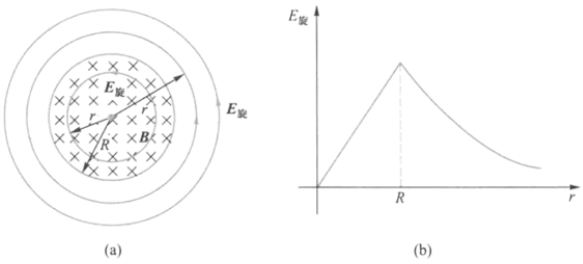
利用法拉第电磁感应定律，我们可以写出：

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

例题 3.1 一个半径为 R 的区域内有均匀磁场，磁感应强度随时间变化为 $B(t)$，且 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$，外部无磁场，求空间的涡旋电场分布.

解

如下图 (a) 所示. 由于内部磁场具有轴向对称性，所以涡旋电场的形状是一系列同心圆.



在半径为 R 的圆的内部作一个半径为 r 的圆周，有：

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_{旋} 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

所以得：

$$E_{旋} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

在半径为 R 的圆的外部，同理可以得到：

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_{旋} 2\pi r = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

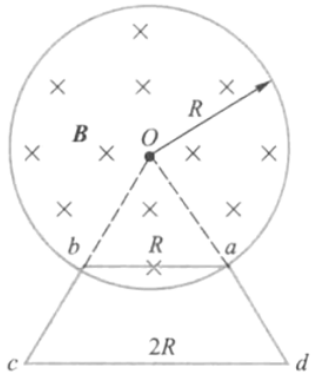
解得：

$$E_{旋}=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

因此，涡旋电场的空间分布如图（b）所示.

下面，我们以一道题目为例，来分析处理感生电动势相关问题的方法.

例题 3.2 在半径为 R 的无限长圆柱形空间内部有均匀的磁场 B 以恒定的变化率 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=k$（$k>0$）变化，有一内阻可忽略的等腰梯形导线框 a,b,c,d 按如图所示方式放置，a,b 两点在圆柱面上，长度关系为 $cd=2ab=2R$，bc 边和 d 边延长线正好通过圆心 O，求等腰梯形导线框中的感应电动势的大小和方向.



解

法一：首先求出圆柱形管内外的涡旋电场，设定回路逆时针方向为正方向，由电磁感应定律：

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

对内部：

$$E\cdot 2\pi r=-k\cdot\pi r^2$$

对外部：

$$E\cdot 2\pi r=-k\cdot\pi R^2$$

得到螺线管内外涡旋电场的分布为：

$$\begin{cases}E=-\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{rk}{2}, & r<R\\ E=-\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{R^2k}{2r}, & r>R\end{cases}$$

涡旋电场方向与标定的正方向相同，即逆时针方向.

导线 ab 中的感应电动势为：

$$\varepsilon_{ba}=\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_0^R \frac{rk}{2}\cdot\cos\theta \mathrm{d}l=\frac{k}{2}\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}R\cos\theta\int_0^R \mathrm{d}l=\frac{\sqrt{3}k}{4}R^2$$

导线 cd 中的感应电动势为：

$$\varepsilon_{cd}=\int_c^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{2R}\frac{R^2k}{2r}\cdot\cos\theta \mathrm{d}l$$

由几何关系得：

$$\mathrm{d}l\cdot\cos\theta=r\mathrm{d}\theta$$

代入得：

$$\varepsilon_{cd}=\int_0^{2R}\frac{R^2k}{2r}\cdot\cos\theta \mathrm{d}l=\frac{R^2k}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/6}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}R^2k$$

导线 bc 段和 da 段与涡旋电场垂直，不会产生感应电动势，故最终有：

$$\varepsilon=\varepsilon_{cd}-\varepsilon_{ba}=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2k$$

法二：电磁感应定律

对于所求回路的电动势，根据：

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S$$

S 即磁场穿过的面积，即 ab 弧对应的部分圆面积减去三角形 Oab 的面积，即：

$$S=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$$

代入，有：

$$\varepsilon=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2k$$

法三：构造回路法

在进行法一中的计算中，我们发现进行曲线积分的计算时，是不够方便的，因此我们可以通过构造一些回路来简化曲线积分的计算.

例如，对于积分：

$$\varepsilon_{ba}=\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

我们可以构造 $O-b-a-O$ 的回路，根据法拉第电磁感应定律，有：

$$\varepsilon_{ba}+\varepsilon_{aO}+\varepsilon_{Ob}=kS_{\triangle Oba}$$

由于 aO、bO 沿着半径方向，因此它们上面的电动势为零，那么就得到：

$$\varepsilon_{ba} = kS_{\triangle Oba} = \frac{\sqrt{3}k}{4}R^2$$

同理，对于积分：

$$\varepsilon_{cd} = \int_c^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

我们可以构造回路 $O-c-d-O$，那么，就有：

$$\varepsilon_{Oc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{dO} = kS_{扇形Oca}$$

那么：

$$\varepsilon_{cd} = \frac{\pi}{6}R^2k$$

后同法一、二.

笔记 处理电磁感应的相关问题，主要有如下三种方法.

1. 运用涡旋电场的定义进行求解，分别计算回路中每个边的电动势，涉及到曲线积分.
2. 使用法拉第电磁感应定律，求出回路中磁通量的变化量，直接计算出整个回路的感生电动势.
3. 构造出一些易于计算的回路来处理涉及到角度的曲线积分. 这些回路一般有几个边是沿着径向的，在这些边上，它们的感生电动势为零.

3.3.2 自感、互感

自感

线圈中的电流变化会在线圈自身中产生感应电动势，该电动势称为自感电动势. 线圈激发的磁场在线圈自身中的全磁通（磁通量乘线圈匝数）只与线圈中通过的电流 I 有关，它们二者之间的比例系数就被称为自感系数：

$$\Psi = N\Phi = LI$$

因此自感系数为：

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

由于线圈中 I 发生变化，在线圈内激发的感应电动势为：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\Psi = N\Phi$$

若通过各匝线圈的磁通量不等，即通过 n_1 匝线圈的磁通量为 Φ_1，通过 n_2 匝线圈的磁通量为 $\Phi_2\cdots\cdots$则总的磁通量为：

$$\Psi = n_1\Phi_1 + n_2\Phi_2 + \cdots = \sum n_i\Phi_i$$

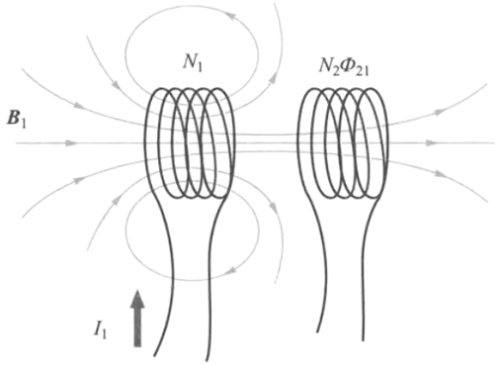
线圈总匝数 $N = \sum n_i$，所以自感系数为（大物阶段一般用不到这种计算方式）：

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{I}\sum n_i\Phi_i$$

需要注意的是，上述公式只是自感的定义式，而非决定式. 自感系数是由回路自身的几何特性和介质特性决定的. 与回路中的电流大小并无关系.

互感

当一个线圈中的电流变化时，在它另一个线圈中产生的感应电动势称互感电动势.



如图，线圈 1 激发的磁场在线圈 2 中的全磁通只与线圈 1 中的电流 I_1 有关：

$$\Psi_{21} = M_{21}I_1$$

同理，线圈 2 激发的磁场在线圈 1 中的全磁通为：

$$\Psi_{12} = M_{12}I_2$$

M_{21} 和 M_{12} 为互感系数的第一种定义，简称互感. 互感系数具有对称性，即下标交换，互感系数不变，即：

$$M_{12} = M_{21}$$

互感系数和自感系数的单位为 H（亨利），$1H = 10^3mH = 10^6\mu H$

当只有两个线圈存在时，M 可以省略下标.

I_1 变化而激发的线圈 2 中的感应电动势为：

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

I_2 变化而激发的线圈 1 中的感应电动势为：

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

互感系数是由回路自身的几何特性、相对位形和介质特性决定的. 互感系数 M 可正可负，取决于 I 的方向；即 M 取正时，表明其互感电动势与该线圈原有的电动势（或电流）是相互加强的，反之 M 取负值时，表明是相互抵消的.

3.3.3 磁场的能量

磁场的能量

对于一个电学体系的能量，有：

$$W = \int U\mathrm{d}q$$

而对电感，有：

$$U = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

因为能量取正值，这里的电压就指电压的绝对值

对于电流，又有：

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

即：

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t$$

利用两式将积分中的 $U, \mathrm{d}q$ 替换，有：

$$W = \int LI\mathrm{d}I$$

可得：

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

这就是磁场的能量，我们可以发现，这个公式与电容的储能公式有相似之处. 我们自然会想到，既然电场有能量密度公式，那么磁场也应有能量密度的概念. 下面，我们尝试推导出磁场的能量密度.

磁场强度

对于电场的高斯定理，我们可以引入电位移矢量 $\vec{D}$ 将高斯定理中的 ε 包括在积分中并应用于介质问题中，同样的，磁场中也有定义的新物理量，便于研究介质问题.

定义磁场强度 $\vec{H}$:

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_r\mu_0}$$

则安培环路定理变为:

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum I_0$$

磁场的极化和介质问题在期末考试中并没有考察，这里引入 H 只是便于后续的计算.

磁场的能量密度

现在讨论螺线管中磁场的能量来得出普遍规律，设螺线管长为 l，面积为 S，体积为 V，磁介质相对磁导率为 μ_r，则根据安培环路定理，螺线管内部的磁场强度 H 和磁感应强度 B 的大小分别为 $H=\dfrac{B}{\mu_r\mu_0}=nI, B=\mu_0\mu_r nI$，螺线管的自感系数为

$$L=\frac{\Psi_m}{I}=\frac{NSB}{I}=\mu_0\mu_r n^2V$$

所以:

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}V\mu_0\mu_r n^2I^2=\frac{1}{2}VBH$$

单位体积的能量称能量密度，即:

$$w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{1}{2}BH$$

该式表明，磁场的能量是储存在磁场所处的空间中，而不是在螺线管的线圈上. 尽管上面的磁场能量密度关系是从螺线管中推导出来的，但是却是普遍适用的. 因此，在磁场存在空间中磁场的总能量为:

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\frac{B^2}{\mu}\mathrm{d}V$$

可见，同样的，磁场的能量是储存在磁场存在的空间中，而不是储存在线圈的导线上.

3.3.4 位移电流

位移电流是电磁学中的一个重要概念，由麦克斯韦提出. 它是麦克斯韦方程组的一个重要组成部分，用于描述电场随时间变化时产生的电流效应. 位移电流的引入完善了安培定律，使其能够适用于所有情况，包括变化的电场.

定义

位移电流密度 $\vec{J}_D$ 定义为电位移矢量 $\vec{D}$ 的时间变化率：

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

其中 $\vec{J}_D$ 是位移电流密度，$\vec{D}$ 是电位移矢量，t 是时间.

位移电流的引入是为了解释电场随时间变化时产生的电流效应. 在麦克斯韦方程组中，安培定律的完整形式为：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

麦克斯韦通过引入位移电流密度 $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$，使得安培定律在所有情况下都成立，包括电场随时间变化的情况.

位移电流特点

1. 位移电流的来源可以理解为电场的变化. 当电场随时间变化时，即使没有实际的电荷移动（即没有传导电流），也会产生位移电流. 这种现象在电容器中尤为明显.
2. 位移电流不会产生焦耳热. 焦耳热是由实际存在的电流（传导电流）在导体中流动产生的，位移电流不会影响电荷的流动.
3. 位移电流的磁效应服从安培环路定理，会正常产生磁场且磁场遵循安培环路定理.

3.3.5 综合例题补充

例题 3.3 两个分别绕有 N_1 匝和 N_2 匝的圆线圈，半径分别为 r_1, r_2，$r_2 \ll r_1$，设大圈的内电阻为 R，求：

1. 两线圈在同轴共面位置时的互感系数；
2. 在小线圈中通以恒定电流 I，并使之沿轴线以速度 v 匀速运动，始终保持二者共轴、两平面平行，求两线圈中心相距为 x 时，大线圈中的感生电动势；

解

1. 计算 N_1 匝线圈在另一线圈内产生的全磁通

$$\Psi = N_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 2\pi r_1 N_1}{r_1^2} \pi r_2^2 = \frac{\mu_0 I_1 r_2^2 \pi N_1 N_2}{2r_1}$$

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 r_2^2 \pi N_1 N_2}{2r_1}$$

2. 在大环中通电流 I'，大环在小环处的磁场：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N_1 2\pi r_1^2 I'}{(r_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 N_1 r_1^2 I'}{2(r_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$M = \frac{\Psi}{I'} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 r_1^2 N_1 N_2}{2(r_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{即互感系数 } M)$$

对于大环，则有

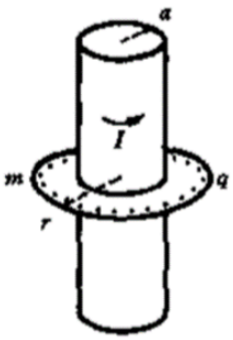
$$\Psi_{大} = MI$$

于是

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}(MI)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2 N_1 N_2 x v}{(x^2 + r_1^2)^{\frac{5}{2}}}$$

例题 3.4 如图所示，有一半径为 a、单位长度绕 n 匝线圈的长直通电螺线管。在其外侧套有一可绕其无摩擦自由转动的圆环，外侧半径为 r，转动惯量为 J。在圆环边缘上均匀地放着 N 个带等量正电荷 q 的小球. 设开始时，螺线管中的电流为 I，圆盘静止，然后将电流切断，试求圆盘转动的角速度.



解

设电流减小到 0 耗时 Δt，则这一过程中的感生电动势为：

$$\varepsilon = \left| -\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right| = \left| -\frac{\pi a^2 \mu_0 n I}{\Delta t} \right| = \frac{\pi a^2 \mu_0 n I}{\Delta t}$$

产生的涡旋电场为：

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{a^2 \mu_0 n I}{2r\Delta t}$$

而对圆盘，电场力产生的冲量矩为

$$\Delta L = E \cdot q \cdot N \cdot \Delta t \cdot r$$

利用公式:

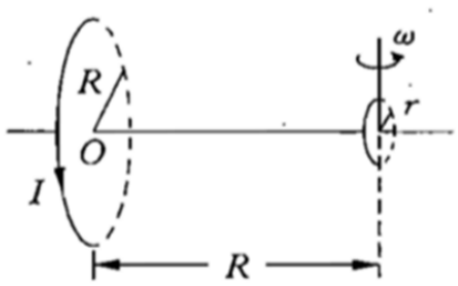
$$\Delta L = J\omega$$

联立得:

$$\omega = \frac{a^2 \mu_0 n I q N}{2J}$$

例题 3.5 一个半径为 r 的非常小的导体圆环与一个半径为 R（$R \gg r$）的很大导体圆环中心相距为 R，开始时两环平面彼此平行并分别与中心联线垂直，如图所示，保持不变的电流 I 通过固定在空间的大环，小环以角速度 ω 围绕着一条直径匀速转动，小环的电阻是 Ω，小环的自感可忽略不计. 求:

1. 小环中的电流强度随时间的变化;
2. 须用多大力矩施于小环，才能保持它匀速转动;



解

1. r 很小，故可将大环在小环处磁场视为均匀的

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi R}{2R^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8R}$$

小环做切割磁感线运动

$$\Phi = B\pi r^2 \cos \omega t$$

$$\varepsilon = \left| \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \right| = \omega B \pi r^2 \sin \omega t = \frac{\omega \sqrt{2} \mu_0 I \pi r^2}{8R} \sin \omega t$$

$$I = \frac{\varepsilon}{\Omega} = \frac{\sqrt{2}\omega \mu_0 I \pi r^2}{8R\Omega} \sin \omega t$$

故

$$I = \frac{\sqrt{2}\omega \mu_0 I \pi r^2}{8R\Omega} \sin \omega t$$

2. 小环可视为一个转动的磁矩

$$m = I \cdot S = \frac{\sqrt{2}\omega\mu_0 I\pi^2 r^4}{8R\Omega}\sin\omega t$$

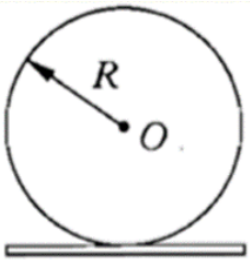
而 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$（注意方向）

$$M = \frac{\sqrt{2}\omega\mu_0 I\pi^2 r^4}{8R\Omega} \cdot \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8R}\sin^2\omega t$$

$$M = \frac{\omega\mu_0^2 I^2\pi^2 r^4}{32R^2\Omega}\sin^2\omega t$$

例题 3.6 一无限长直圆柱面，由绝缘体构成半径为 R，单位长度上电荷为 λ，若以角速度 ω 绕轴线匀速转动，求：

1. 空间中的磁感强度；
2. 若其以匀角速度 ω 转动，有一长为 $2R$ 的金属杆与圆柱面绝缘相切，则杆上的感生电动势为多少？



解

1. 可视为螺线管，$nI = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi}$

$$B = \mu_0 nI = \mu_0\frac{\lambda}{2\pi}\omega = \frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}$$

2. 空间 r 处涡旋电场为

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0\lambda a R^2$$

$$E = \frac{\mu_0\lambda a R^2}{4\pi r}$$

对杆上进行积分，则有

$$\mathrm{d}\varepsilon = E\mathrm{d}l = \frac{\mu_0\lambda a R^2}{4\pi r}\cos\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}R\mathrm{d}\theta$$

$$\varepsilon = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0\lambda a R^2}{4\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0\lambda a R^2}{8}$$

3.4 真题演绎

✍ **练习 3.1** 对位移电流，有下列四种说法，请指出哪一种说法正确：（　）

A. 位移电流是由变化的电场产生的；

B. 位移电流是由线性变化的磁场产生的；

C. 位移电流产生焦耳热；

D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

解 A

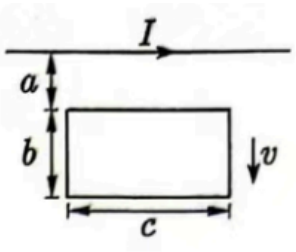
根据位移电流的定义及特点可以得到答案.

练习 3.2 一无铁芯的长直密绕螺线管，在保持其半径和总匝数不变的情况下，把螺线管稍拉长一些，考虑不漏磁的理想情况下，则它的自感系数将_____.（变小、不变、变大）

解 变小

由于 $L=\dfrac{\mu_0 N^2 S}{l}$，l 增大，L 变小.

练习 3.3 无限长直导线通有电流，下方有一线框，t 时刻时，线框位于图示位置，求下列情况 t 时刻的感应电动势：



(1) 线框以匀速 v 向下运动，导线通恒定电流 I_0；

(2) 线框不动，导线通有电流 $I=I_0\sin(\omega t)$；

(3) 线框以匀速 v 向下运动，导线通有电流 $I=I_0\sin(\omega t)$.

解

(1) 设任意时刻线框上边距离长直导线为 x，

$$\Phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_x^{x+b}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}c\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mu_0 I_0 c v}{2\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}\right)\end{aligned}$$

当 $x=a$ 时，

$$\varepsilon_1=\frac{\mu_0 I_0 c v}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)$$

(2)

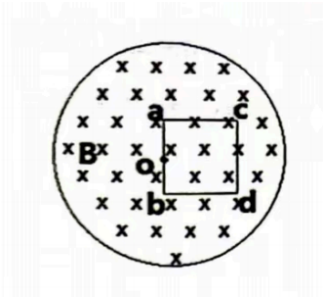
$$\Phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}c\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_0 c\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

$$\varepsilon_2=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I_0 c\omega\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

(3)

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
$$= \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi r} c\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_0 c \sin(\omega t)}{2\pi} \ln\frac{x+b}{x}$$
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I_0 c v}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)\sin(\omega t) - \frac{\mu_0 I_0 c\omega\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

练习 3.4 圆柱形区域内存在一匀强磁场 $\mathbf{B}$，且以恒定变化率 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 减小，一边长为 l 的正方形导体框 $abcd$ 置于该磁场中，框平面与磁场垂直，圆柱形匀强磁场中心 O 位于 ab 边的中心，如图所示，则 c 点处的有旋电场强度大小 $E_c =$ _____，dc 段上的感生电动势大小 $\varepsilon_{dc} =$ _____



解 $\frac{\sqrt{5}\mathrm{d}B}{4\mathrm{d}t}$，$\frac{1}{2}l^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

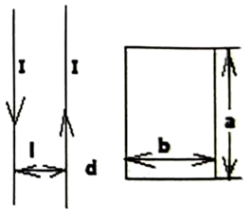
$E\cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

当 $r = \frac{\sqrt{5}l}{2}$ 时，$E_c = \frac{\sqrt{5}\mathrm{d}B}{4\mathrm{d}t}$

对于非闭合导线 dc，构建 we、co、od 闭合回路，故感生电动势的大小 $\varepsilon = \left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}l^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

练习 3.5 两根无限长的平行输电线，相距为 l，载有大小相等而方向相反的电流 $I = I_0\cos\omega t$；旁边有一长为 a，宽为 b 的矩形线圈，它们在同一平面内，长边与输电线平行，到最近一条的距离为 d，如图所示，试求：

1. 导线与矩形线圈的互感系数；
2. 矩形线圈中的感应电动势.



解

1. 设通过线圈的磁通量为 Φ，则 $\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I_0\cos\omega t}{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)a\mathrm{d}r$,

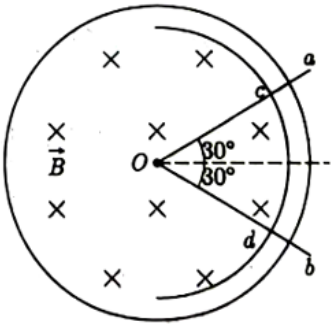
故 $\Phi=\dfrac{\mu_0 a I_0\cos\omega t}{2\pi}\displaystyle\int_d^{d+b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 a I_0\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{(d+b)(d+l)}{d(d+b+l)}$,

所以互感系数 $M=\dfrac{\Phi}{I_0\cos\omega t}=\dfrac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\dfrac{(d+b)(d+l)}{d(d+b+l)}$.

2. $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_0 I_0\omega a\sin\omega t}{2\pi}\ln\dfrac{(d+b)(d+l)}{d(d+b+l)}$.

练习 3.6 在垂直图面的圆柱形空间内有一随时间均匀变化的匀强磁场，其磁感应强度的方向垂直图面向里. 在图面内有两条相交于 O 点，夹角为 60° 的直导线 Oa 和 Ob，而 O 点则是圆柱形空间的轴线与图面的交点. 此外，在图面内另有一半径为 r 的半圆环形导线在上述两条直导线上以速度 $\vec{v}$ 匀速滑动.$\vec{v}$ 的方向与 $\angle aOb$ 的平分线一致，并指向 O 点 (如图). 在时刻 t，半圆环的圆心正好与 O 点重合，此时磁感应强度的大小为 B，磁感应强度大小随时间的变化率为 k（k 为正数）. 求：

1. 此时半圆环导线与两条直线所围成的闭合回路 $cOdc$ 中的动生电动势；
2. 此时闭合回路 $cOdc$ 中的感生电动势；
3. 此时闭合回路 $cOdc$ 中的总感应电动势.



解

1. 取顺时针为正，动生电动势为：$\varepsilon_{i1}=\displaystyle\int_c\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=vBc\bar{d}=vBr$，顺时针
2. $\varepsilon_{i2}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B\cdot\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{6}\pi r^2\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{6}\pi r^2 k$，逆时针
3. $\varepsilon=\varepsilon_{i1}+\varepsilon_{i2}=vBr-\dfrac{1}{6}\pi r^2 k$，$\varepsilon>0$ 时，顺时针，反之，逆时针.