彭·高数

高等数学上期末试题集

(2010-2023)

彭康书院学业辅导与发展中心

彭康学导团

2023 高数上期末试题

一、单选题

1. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对任意的正整数 n 满足 $a_n \le b_n \le a_{n+1}$, 则【　　】.

   A. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

   B. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

   C. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有相同的敛散性;

   D. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有不同的敛散性.

2. 已知函数 $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t, g(x) = \int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则【　　】.

   A. $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数;　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数;

   C. $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数;　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期函数.

3. 函数 $f(x) = \dfrac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 跳跃间断点的个数为【　　】.

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2f\left(x^2\right)}{x^2}$ =【　　】.

   A. 0　　B. $f'(0)$　　C. $-f'(0)$　　D. $-2f'(0)$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处【　　】.

   A. 不可导;　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$;

   C. 取得极大值;　　D. 取得极小值.

6. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式为【　　】.

   A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$;

   B. $y^*=ax\left(ax^2+bx+c\right)+A\sin x+B\cos x$;

   C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$;

   D. $y*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

二、填空题

1. 当 $x\to 0^+$ 时, $(1-\cos\sqrt{x})\ln(1+x^3)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 $n=$_____.

2. 设 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=2}=$_____.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1}=$_____.

5. $\int_{-1}^{1}\left(x^2\sin x+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$_____.

6. 微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解为_____.

三、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}$.

2. 计算 $\int\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+x\mathrm{e}^y=\arctan y$ 所确定, 求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

4. 计算 $I=\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, x<0\end{cases}$.

5. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}+\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

6. 设 $f(x)$ 为可微函数, 解方程 $f(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x\mathrm{e}^x[f(t)]^2dt$.

7. 试问 $f(x)=\int_0^1 e^{x^2t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处是否取得极值, 若取得极值, 是极大值还是极小值?

8. 设直线 $y=ax(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形记为 D_1, 其面积为 S_1, 它们与直线 $x=1$ 所围图形记为 D_2, 其面积为 S_2.
   (1) 确定 a 的值, 使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值;
   (2) 当 S_1+S_2 取得最小值时, 求平面图形 D_2 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

9. 求方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-3y-\mathrm{e}^t\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y-\mathrm{e}^t\end{cases}$ 的通解.

四、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$, 求证:

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1 f^3(x)dx.$$

2023 高数上期末试题解析

一、单选题

1. C

解析. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则由 $a_n \leqslant b_n \leqslant a_{n+1}$ 及夹逼原理可知

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

即 $\{b_n\}$ 收敛.

若 $\{b_n\}$ 收敛, 令 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则由

$$a_n \leqslant b_n \leqslant a_{n+1},$$

知 $\{a_n\}$ 单调增, 且

$$a_n \leqslant b,$$

即 $\{a_n\}$ 有上界, 则 $\{a_n\}$ 收敛, 从而可知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 有相同的敛散性, 故选 C. □

2. B

解析.

$$f(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^{-x} \mathrm{e}^{\cos(-u)}\,\mathrm{d}\,(-u) = -\int_0^{x} \mathrm{e}^{\cos u}\,\mathrm{d}u = -f(x)$$

$$g(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^{-x} \mathrm{e}^{(-u)^2}\,\mathrm{d}\,(-u) = -\int_0^{x} \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u = -g(x)$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数, 故选 B. □

3. A

解析. 由初等函数在其定义域内连续, 可得间断点为 $x=-1, x=0, x=1$,

在 $x=0$ 处, 由洛必达法则易得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, 故 $x=0$ 为可去间断点;

在 $x=1$ 处, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{x\ln|x|}{|1-x|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{1-x} = -1$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点;

在 $x=-1$ 处, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{-1}{|1-(-1)|}\ln|-1| = 0$, 故 $x=-1$ 为可去间断点. 即有一个跳跃间断点, 故选 A. □

4. C

解析.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2f\left(x^2\right)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(xf(x)-xf(0))-\left(2f\left(x^2\right)-2f(0)\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-xf(0)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2f\left(x^2\right)-2f(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2\right)-f(0)}{x^2}\\&=f'(0)-2f'(0)\\&=-f'(0),\end{aligned}$$

故选 C. □

5. D

解析. 由该极限存在和 $f(x)$ 的连续性易得 $f(0)=0$, 故

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=2\cdot 0=0,$$

故 $f'(0)=0$,

在 0 的某一去心邻域内有 $\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)^2}>0, f(x)>f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 故选 D. □

6. A

解析. 对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 特征根为 $\lambda=\pm i$.

由线性微分方程解的性质可得, 如果 y_1 是微分方程 $y''+y=x^2+1$ 的解, 且 y_2 是微分方程 $y''+y=\sin x$ 的解, 则 y_1+y_2 是原微分方程的解.

对于微分方程 $y''+y=x^2+1=\mathrm{e}^0\left(x^2+1\right)$ 而言, 因为 0 不是特征根, 从而其特解形式可设为 $y_1^*=ax^2+bx+c$.

对于微分方程 $y''+y=\sin x$ 而言, 因为 i 为单重特征根, 从而其特解形式可设为 $y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$. 从而, 可设原微分方程的特解形式可设为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x).$$

故选 A. □

二、填空题

1. 2

解析.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos\sqrt{x})\ln(1+x^3)}{x\sin x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\cdot x^3}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n-3}}=0$, 故 $n<3$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$ 故 $n>1$,

综上 $n=2$. □

2. -6

解析.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1}{(1-t)^2}\Big/\frac{1}{t}=\frac{t}{(1-t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+t}{(1-t)^3}\Big/\frac{1}{t}=\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$$

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=\dfrac{2(1+2)}{(1-2)^3}=-6$ □

3. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

解析. 设曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$, 则

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x+1)x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

故斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$. □

4. $e-1$

解析. 结合定积分定义, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=1\cdot\int_0^1 e^x\,dx=e-1.$$

□

5. $\dfrac{\pi}{2}$

解析. 由于被积函数中 $x^2\sin x$ 为奇函数, 同时利用定积分的几何意义可得

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2\sin x+\sqrt{1-x^2}\right)dx=0+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

□

6. $\tan\left(x^2+x\right)$

解析. 将 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+2x)\left(y^2+1\right)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+2x)\,\mathrm{d}x$, 两边积分可得 $\arctan y=x+x^2+C$.
将 $x=0, y=0$ 代入可得 $C=0$, 所以方程的特解为 $y=\tan\left(x+x^2\right)$. □

三、计算题

1. **解析.**

证法 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}\\&\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1-x}+\cos x}{2x}\\&\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{(1-x)^2}-\sin x\right]\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

证法 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}&=\lim_{x\to0}\frac{-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)+x+o\left(x^2\right)}{x\left(1+x+o\left(x\right)-1\right)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

2. **解析.**

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x&=-\int\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\&=-\left(\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^{-x}-\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right)\\&=-\left(\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^{-x}-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

令 $t=\mathrm{e}^x$, 则 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, 那么

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=\ln t-\ln(t+1)+C\\&=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)+C\end{aligned}$$

即

$$\int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) + C$$

□

3. **解析.** 令 $x=0$, 解得 $y=1$ 方程左右两侧对 x 求导, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}\right)+\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

令 $x=0, y=1$, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}}\right)+\mathrm{e}+0\cdot\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

化简得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2\mathrm{e}-\frac{1}{2}$ 故切线方程为 $y=\left(2\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)x+1$ □

4. **解析.**

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &= -2\sqrt{1-x}\Big|_{-1}^0 + \ln(1+x)|_0^1\\ &= -2\left(1-\sqrt{2}\right)+\ln 2\\ &= \ln 2 - 2 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

□

5. **解析.**

有 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ $\int_1^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\cos x\right|\,\mathrm{d}x \le \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

且式子右侧两积分均收敛, 可得积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$ 均收敛, 于是所求积分收敛. □

6. **解析.** 原方程两边求导, 得 $f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x[f(x)]^2$, 即

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)}=\mathrm{e}^x$$

令 $u=\frac{1}{f(x)}$, 则 $u'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, 于是得到关于 u 的方程 $u'+u=-\mathrm{e}^x$, 易得其通解为 $u=C\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$. 由原方程可知 $f(0)=1$, 故 $C=\frac{3}{2}$, 最后得到 $f(x)=\frac{2}{3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}$. □

7. **解析.**

做法一 令 $xt=u$, 则

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0.$$

当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{x^2}-\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u}{x^2}=\dfrac{x\left(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{\xi^2}\right)}{x^2}$.

当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

做法二 显然 $f(0)=1$, 又

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2t^2}}\,\mathrm{d}t-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2\xi^2}-1}{x}\quad(0<\xi<1)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\xi^2}{x}=0.\end{aligned}$$

又当 $x\neq 0$ 且 $t\neq 0$ 时, $e^{x^2t^2}>1$, 则当 $x\neq 0$ 时,

$$f(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2t^2}\,\mathrm{d}t>1=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值

做法三

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left[1+x^2t^2+\cdots\right]\mathrm{d}t\\&=1+\frac{x^2}{3}+\cdots\end{aligned}$$

则 $f'(0)=0, f''(0)=\dfrac{2}{3}>0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值, □

8. **解析.**

(1) $S_1+S_2=\int_0^a\left(ax-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_a^1\left(x^2-ax\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}$.

记 $f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}$, 则 $f'(a)=a^2-\dfrac{1}{2}, f''(a)=2a$.

令 $f'(a)=0$, 得到 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 且 $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$. 所以 S_1+S_2 在 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 处取到最小值 $\min\{S_1+S_2\}=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(2) D_2 绕 x 轴旋转的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^1 \left[x^4 - (ax)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{2a^5 - 5a^2 + 3}{15}\pi \end{aligned}$$

D_2 绕 y 轴旋转的体积

$$\begin{aligned} V_y &= \int_a^1 2\pi x \left(x^2 - ax\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{a^4 - 4a + 3}{6}\pi \end{aligned}$$

将 $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 代入, 就得到

$$V_x = \frac{\sqrt{2}+1}{30\sqrt{2}}\pi, V_y = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{24}\pi$$

□

9. **解析.**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{bmatrix}$. 易得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1$, 对应的特征向量为 $(3,1)^{\mathrm{T}}, (1,1)^{\mathrm{T}}$, 故有基解矩阵

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

且有 $\boldsymbol{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}^{-1}(0) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

故可得特解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \int_0^t \boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\tau - t} \\ \mathrm{e}^{2\tau - t} \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

四、 **解析.** 令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$, 只要证 $F(1)>0$.

由 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$ 知, $f(x)>0, x\in(0,1]$.

又

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

令 $\varphi(x)=2\int_0^t f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则

$$\varphi'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)\left(1-f'(x)\right)>0$$

从而 $\varphi(x)$ 单调增. 又 $\varphi(0)=0$, 则

$$\varphi(x)>0, x\in(0,1]$$

从而 $F'(x)>0, x\in(0,1]$, 则 $F(x)$ 单调增, 从而 $F(1)>F(0)=0$, 原题得证. □

2022年期末真题

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\cos x$, 则当 $x\to 0$ 时, 有 ( )

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小:

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小;

(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, $f(0)=0$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是 ( )

(A) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2}}f(1-\cos h)$ 存在.

(B) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-\mathrm{e}^{h}\right)$ 存在.

(C) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在.

(D) $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ 存在.

3. 设函数 $f(x)$ 的导函数是 $\sin(2x)$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

(A) $-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

(B) $\frac{1}{2}\sin(2x)+1$.

(C) $-\frac{1}{2}\cos(2x)-x$.

(D) $\frac{1}{2}\sin(2x)-x$.

4. 若线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个解 $\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{2x}$, 则该方程的通解是 ( )

(A) $C_{1}\mathrm{e}^{-x}+C_{2}\mathrm{e}^{x}+C_{3}\mathrm{e}^{2x}$.

(B) $C_{1}\mathrm{e}^{-x}+C_{2}\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}$.

(C) $C_{1}\mathrm{e}^{-x}+C_{2}\mathrm{e}^{x}-\left(C_{1}+C_{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(D) $C_{1}\mathrm{e}^{-x}+C_{2}\mathrm{e}^{x}-\left(C_{1}+C_{2}-1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

5. 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x}t^{2}f\left(x^{3}-t^{3}\right)\mathrm{d}t=$ (　　)

(A) $x^{2}f(0)$.

(B) $x^{2}f\left(x^{3}\right)$.

(C) $-x^{2}f\left(x^{3}\right)$.

(D) $3x^{2}f\left(x^{3}\right)$.

二、填空题

1. 曲线 $\ln\left(x^{2}+y\right)=x^{3}y+\sin x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$

3. 若函数 $f(x)=\ln\left(1-x^{2}\right)$, 则 $f^{(3)}(0)=$

4. 设 $f(x)=\sin x^{2}+\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$

5. 一阶线性常微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\cos x}{x}$ 的通解为

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{2}+x}-x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

2. 设 $x=t+\ln(1+t)$, $y=t^{2}+2t$, 计算 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 及 $\left.\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}\right|_{t=0}$.

3. 计算不定积分 $\int x^{2}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

4. 求常微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

四、解答题

1. (7 分)设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x>0,(a \text{ 为常数}), a \text{ 取何值时函数 } f(x) \text{ 在}\\ e^a, & x\le 0\end{cases}$ 点 $x=0$ 处连续?

2. (7 分)讨论函数 $f(x)=x-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的单调性、极值点, 函数 $f(x)$ 图像的凹凸性及拐点.

3. (7 分) 证明反常积分 $I=\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 收敛, 并求其值.

4. (7 分) 求微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\ t\\ 0\end{pmatrix}$ 的通解.

5. (7 分) 求曲线 $y=x^2-2x$ 与 x 轴所围封闭图形的面积, 并求该平面图形绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积.

6. (6 分) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$, 证明:

(1) 至少存在一点 $x_0\in(0,2)$ 使得 $f(x_0)=1$;

(2) 至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使得 $\xi f'(\xi)+(1+\xi)f(\xi)=1+\xi$.

2022年期末真题解析

一、选择题

1. A

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}e^x+\sin x=1$$

故本题答案选 A

2. B

令 $1-\mathrm{e}^h=t$, 则 $h=\ln(1-t)$, 当 $h\to 0$ 时, $t\to 0$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-\mathrm{e}^h\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot(-1),\end{aligned}$$

由导数的定义知, 应选 (B). 关于其他三个选项的排除, 可用反例说明.

3. A

因为f(x) 的导函数为 $\sin 2x$

$$\begin{aligned}&\int\sin 2x dx\\&=\frac{1}{2}\int\sin 2x d2x\\&=-\frac{1}{2}\cos 2x+C\end{aligned}$$

∴ 原函数为 $-\frac{1}{2}\cos 2x$，故答案选A

4. C 解题思路设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为定义在区间I上的 n 个函数, 如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得当 x ∈ 时有恒等式

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0\text{ 成立,}$$

那么称这 n 个函数在区间I上线性相关; 否则称线性无关。对于两个函数的情形, 如果它们的比为常数, 那么它们就线性相关; 否则它们是线性无关的。如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解, 那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是方程的通解。由此不难得到答案,故本题选C

5. B

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x);\left(\int_{g(x)}^b f(t)dt\right)'=-g'(x)f(g(x));$$

$$f(x)=\int_0^x t^2f\left(x^3-t^3\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^x f\left(x^3-t^3\right)d\left(x^3-t^3\right)$$

令 $x^3-t^3=ut\in\left[x^3,0\right]$

$$f(x)=\int_0^x t^2f\left(x^3-t^3\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^x f\left(x^3-t^3\right)d\left(x^3-t^3\right)=-\frac{1}{3}\int_{x^3}^0 f(u)d(u)$$

$$f'(x)=x^2f\left(x^3\right)$$

二、填空题

1. $y=x+1$

【解析】方程两端同时对 x 求导,得 $(2x+y')/\left(x^2+y\right)=3yx^2+\left(x^3\right)y'+\cos x$　y' 表示　y 的导数. 把 $x=0,y=1$ 带入解得 $y'=1$, 所以在 $(0,1)$ 处切线的斜率为 1 , 即切线方程为 $y=x+1$

2. $\frac{2}{\pi}$

$$\text{解:}\quad \text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{或}\quad \text{原式} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

3. $f(x) = \sin x^2$

由题意, 已知函数 $f(x) = \sin x^2 + \int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx$

$$\text{设 } A = \int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \sin x^2 + A$$

将等式两边同时乘 x, 得

$$xf(x) = x\sin x^2 + Ax$$

将等式两边同时对 x 从一 π 到 π 上积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} Axdx$$

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx + A\int_{-\pi}^{\pi} xdx$$

$\therefore$ 积分区间关于原点对称, 且有 $x\sin x^2$ 和 x 均为关于 x 的奇函数根据定积分的对称性和奇偶性, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$\therefore A = 0 + A\times 0 = 0$$

$$\therefore f(x) = \sin x^2$$

4. 0

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3}.$$

将 $x = 0$ 代入上式

$$\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0.$$

5. $y = (\sin x + C)x$

首先, 我们考虑一阶线性微分方程

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}\ 。$$

为了求解该微分方程的通解，我们可以使用常数变易法。设通解为 $y = C(x)y_1$, 其中 C(x) 为待定的函数, y_1 为对应的齐次线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ 的通解。对于齐次线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$, 我们可以求解得到 $y_1 = C_1x$, 其中 C_1 为常数。将 y_1 代入原方程, 得到

$$C'(x)x + C(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x = C(x)\cdot\frac{\cos x}{x}$$

化简后得到 $C'(x) = \cos x$, 然后对 C′(x) 进行积分, 得到 $C(x) = \sin x + C$, 其中C为常数。将C (x) 代入通解 $y = C(x)y_1$, 得到 $y = (\sin x + C)x$, 其中C为任意常数。

因此, 正确的是答案$y = (\sin x + C)x$,

三、计算题

1. $\frac{1}{2}$

解 : $\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \ln 1 = 0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}.$$

2.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{2+t}{1+t}\quad \ddot{x}=-\frac{1}{(1+t)^2}$$
$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{2(t+2)}{}\quad \ddot{y}=2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(1+t)^2}{(2+t)}$$
$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{(1+t)^3}{(2+t)^3}\left(\frac{6+2t}{1+t}\right)$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=1,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}$$

3.$\frac{x^3}{3}arctanx-\frac{1}{6}\left(1+x^2-\ln\left|1+x^2\right|\right)+\mathrm{C}$

解答: 我们要求不定积分 $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$ 。我们可以使用分部积分法来简分部积分法公式为 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$, 其中 u 和 v 是可微函数。选择 $u=\arctan x$ 和 $\mathrm{d}v=x^2\,\mathrm{d}x$, 我们可以得到 :

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, v=\frac{x^3}{3}\ 。$$

将上述结果代入分部积分公式,我们得到:

$$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

现在,我们要求解 $\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 这个积分。我们可以使用代换法, 令因此, $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$, 并且 $x^2=t-1$ 。将上述结果代入原积分,我们

得到:

$$\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t-1)x}{3}\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}t}{2x}=\frac{1}{6}\int\left(\frac{t-1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

化简上述积分,我们得到:

$$\frac{1}{6}\int\left(\frac{t}{t}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(t-\ln|t|)+C,$$

其中 C 是积分常数。将代换结果和之前的分部积分结果结合, 我们得到最终的结果:

$$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\left(1+x^2-\ln\left|1+x^2\right|\right)+\mathrm{C}$$

其中 C 是积分常数。 4.$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$.

解: 所给方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+5r^2=0,$$

它的根是

$$r_1=r_2=0, r_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}.$$

因此所求通解为

$$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right).$$

四、解答题

1. $a=-\frac{1}{6}$

由已知有: 函数

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x>0\\ e^a, & x\le 0\end{cases}$$

当函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时, 有:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=e^a$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}-1+1\right)}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{6}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

故

$e^a=e^{-\frac{1}{6}}$

故 $a=-\dfrac{1}{6}$

2.

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}},f''(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

单调性: 在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调道增在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上单调送减

极大值点: $x=-\sqrt{3}$ ，极小值点 $x=\sqrt{3}$ 拐点: $(0,0)$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为凸函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数

3. $\dfrac{\pi}{2}$

解: $x=1$ 为瑕点，

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{\frac{1}{6}}}{2-x}=0$$

$\therefore \int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}6[$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\overset{t=\sqrt{1-x}}{=}\int_1^0\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{\left[2-\left(1-t^2\right)\right]t}$$

$$=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t\big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

4. 首先，考虑对应齐次方程组 $\frac{d\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\-3&0&2\end{pmatrix}\vec{x}$ 的通解. 个方程组的特征值可以通过求解特征方程来找到.

特征方程为：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&3\\-3&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

特征值为 $\lambda=-1$ 时，特征向量为 $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

特征值为 $\lambda=2$ 时，特征向量为 $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 和$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$

为了找到非齐次方程的特解，我们假设特解形式为一个常数乘以一个与右侧项形式相似的向量，即 $\vec{x}_p(t)=\vec{u}t$ ，其中 $\vec{u}$ 是待定常数向量。

将 $\vec{x}_p(t)=\vec{u}t$ 代入非齐次方程组，得到 $\frac{d\vec{x}_p}{dt}=\vec{u}$ ，代入方程后得到:

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\-3&0&2\end{bmatrix}\vec{u}t+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$$

解方程得到 $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$。因此，非齐次方程的一个特解为 $\vec{x}_p(t)=\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$。

综合齐次和非齐次方程的通解为：

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_h(t)+\vec{x}_p(t)=c_1e^{-t}\vec{v}_1+c_2e^{2t}\vec{v}_2+c_3e^{2t}\vec{v}_3+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$$

其中 c_1,c_2,c_3 是任意常数.

5. (1)$S=\frac{4}{3}$ (2)$V=\frac{16}{15}\pi$

解: 令 $f(x)=x^2-2x=0$ 则 $x=0$ 或 $x=2$ (确定积分上下限) $\therefore$ 与x 轴的两交点为 $(0,0)\quad(2,0)$

$$\therefore S=\left|\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\right|_0^2|=\frac{4}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx\\&=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx\\&=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2\\&=\frac{16}{15}\pi\end{aligned}$$

6. (1) $\because f(x)$ 在 $[0.2]$ 上可导, 且 $\int_0^2 f(x)dx=2$ $\therefore$ 由积分中值定理得，存在 $\xi\in[0,2)$, 使得

$$\int_0^2 f(x)dx=f(\xi)(2-0)=2$$

$$\Rightarrow X(f(\xi)=1$$

即证存在 $\xi\in[0,2)$, 使得 $f\left(x_0\right)=1$ ；（2）

$$\text{设 } F(x)=xe^x(f(x)-1)$$

$$F'(x)=e^x\left[xf'(x)+(x+1)\left(f(x)-1\right)\right].$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时 } F(0)=1$$

由(1)知在 $(0,2)$ 上存在 x_0 便 $f\left(x_0\right)=1$

$$\text{即 } F\left(x_0\right)=0$$

由罗尔中值定理得：至少存在一点 $\xi \in (0,2)$ 使得 $\xi f'(\xi) + (1+\xi) f(\xi) = 1 + \xi$.

2021年期末真题

一、选择题

1. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, 总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, 且 $\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$, 则以下关于 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 的论述正确的是

A. 存在且为 0

B. 存在但不一定为 0

C. 一定不存在

D. 不一定存在

2. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是

A. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

C. $(0,1)$

D. $(\pi, +\infty)$

3. 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$, 则当 $a<x<b$ 时, 有 (　)

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

4. 设函数 $f(x) \in C[-1,1]$, 则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(x)\mathrm{d}x}{x}$ 的

A. 第一类跳跃间断点

B. 第一类可去间断点

C. 第二类无穷间断点

D. 连续点

5. 如下图所示, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 表示的是

A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

B. 梯形 $ABOD$ 的面积

C. 曲边三角形 ACD 的面积

D. 三角形 ACD 的面积

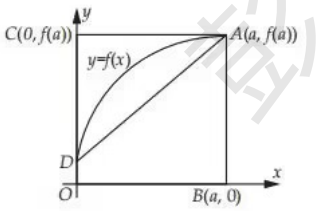


图 1: 5题图

二、填空题

1. 设 $f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$, 则 $f(x)=$

2. 设 $f(x)=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{x^2e^{t(x-2)}+ax-1}{e^{t(x-2)}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 则常数 $a=$

3. $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x\,\mathrm{d}x=5, f(\pi)=2$, 则 $f(0)=$

4. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\left(e^{-t^2}+6\right)\mathrm{d}t$, 则 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=$

5. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$. 其中常数 $p>0$.

三、计算题

1. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2ae^x, & \\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geq 0\end{cases}$, 试确定常数 a,b 的值, 使得函数 $f(x)$ 在其定义域上可导.

3. 求函数 $f(x)=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值和其对应曲线的凹凸区间以及渐近线, 并画出此函数的简单示意图.

4. 计算定积分 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. 计算不定积分 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 计算 $I=\int_{-1}^3\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

7. 假设由抛物线 $y=x^2, y=4x^2$ 以及直线 $y=H(H>0)$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转抛物面型容器内盛满水, 若将水全部抽出, 需要作多少功?

四、

求微分方程 $(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'-8y=4x-3$ 的通解.

五、

求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ 的通解.

六、

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续, 在 $(0,2\pi)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(\pi)=3, f(2\pi)=2$ 试证明在 $(0,2\pi)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

七、

设函数 $f(x), g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(-x)+f(x)=A$ (A 是常数).

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\arctan e^x\,\mathrm{d}x$.

2021年期末真题解析

一、选择题

1. D.

令$\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}, f(x)=\sqrt{x^2+2}, g(x)=\sqrt{x^2+3}$,则$\varphi(x)<f(x)<g(x)$,且

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0, F\lim_{x\to\infty}f(x)\text{flX(}$$

2. C.

令 $f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\le 0$. 即 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\ln x\right]=+\infty, f(1)=0, \text{故在 } (0,1) \text{ 上 } f(x)>0$$

3. A.

设 $\mathrm{h}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$, 故 h(x) 在 (a, b) 单调递减有 $h(b)<h(x)<h(a)$, 即 $\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)}$, 于是

$$f(x)g(a)<f(a)g(x)$$

4. B.

因为 $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$, 又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

5. C.

因为 $\int_0^x xf'(x)dx=\int_0^x xdf(x)=xf(x)|_0^x-\int_0^x f(x)dx$, 其中第一个式子代表 OBAC 面积, 第二个式子代表 OBAD 面积.

二、填空题

1. e^{x+1}

因为

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}(x+2)\cdot\frac{n}{n-2}}\\&=e^{x+2}\end{aligned}$$

于是 $f(x)=e^{x+1}$

2. $\frac{5}{2}$

因为

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x>2\\a+\frac{3}{2}, x=2\\ax-1, x<2\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow a=\frac{5}{2}$

3. 3

因为

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin x dx &= \int_0^\pi \sin x df'(x)\\ &= f'(x)\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)d\sin x\\ &= -\int_0^\pi f'(x)\cos x dx = -f(x)\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)d\cos x\\ &= f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x dx\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x dx &= \int_0^\pi f(x)\sin x dx + \int_0^\pi f''(x)\sin x dx\\ &= \int_0^\pi f(x)\sin x + f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x dx\\ &= f(\pi)+f(0)\end{aligned}$$

故 $f(\pi)+f(0)=5, f(0)=3$

4. $4x(e^{-x^4}+6)$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0} f'(x+\alpha)+f'(x-\alpha) = 2f'(x)\\ &= 4x(e^{-x^4}+6)\end{aligned}$$

5. $\dfrac{1}{p+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n})^p\\ &= \int_0^1 x^p dx\\ &= \frac{1}{p+1}x^{p+1}|_0^1\\ &= \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

三、计算题

1. 对原式泰勒展开, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{(e^x-1)\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. 容易发现 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 可导, 故只需考虑分段点处的情况. 若使 f 在 $x=0$ 处可导, 则 f 在 $x=0$ 处连续, 有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0), \text{又 } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sin x + 2ae^x = 2a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 9\arctan x + 2b(x-1)^3 = -2b$$

因此 a = −b. 因为 f 在 $x=0$ 处可导, 有 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 又

$$f'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x+2ae^x-2a}{x}=2a+1$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^\pi}\frac{9\arctan x+2b(x-1)^3+2b}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}9+2b\cdot\left(x^2-3x+3\right)\\&=9+6b\end{aligned}$$

即 2a + 1 = 9 + 6b 解得 $a=1,b=-1$

3. 因为 $f'(x)=1-\frac{2}{1+x^2}$ 解得驻点为 $x=\pm1$, 又 $f''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ 拐点为 x = 0, 故 f 的单调增区间是

$$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

单调减区间是

$$(-1,1)$$

$$f_{\max}=f(-1)=\frac{\pi}{2}-1,f_{\min}=f(1)=1-\frac{\pi}{2}$$

f 的图像在 $(-\infty,0)$ 下凹, 在 $(0,+\infty)$ 上凸, $(0,,0)$ 是拐点

渐进线: $x\to+\infty$ 为 $y=x-\pi,x\to-\infty$ 方向为 $y=x+\pi$

4.

$$\begin{aligned}&\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}d(1+x)\\&=(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3-\int_0^3(1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx\\&=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}&=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac{1}{2}\int\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

6. 设被积函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 有奇点 $x=0,x=2$, 设

$$I=\int_{-1}^3g(x)dx=\int_{-1}^0g(x)dx+\int_0^2g(x)dx+\int_2^3g(x)dx=I_1+I_2+I_3$$

又 $f(0-0)=-\infty,f(0+0)=+\infty,f(2-0)=-\infty,f(2+0)=+\infty$,故

$I_1=\arctan f(x)|_{-1}^0=\arctan(f(0-0))-\arctan(f(-1))=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$

$I_2=\arctan f(x)|_0^2=\arctan(f(2-0))-\arctan(f(0+0))=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$

$I_3=\arctan f(x)|_2^3=\arctan(f(3))-\arctan(f(2+0))=\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}$

于是 $I=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$

7.

$$dW=\pi(y-\frac{y}{4})g(H-y)dy=\frac{3}{4}\pi g(Hy-y^2)dy$$

故

$$W=\frac{3}{4}\pi g\int_0^H(Hy-y^2)dy=\frac{1}{8}\pi gH^3$$

四、

令 $t=\ln(2x-1)$, 则

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x-1}\frac{dy}{dt}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入原式，化简得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=\frac{e^t}{2}-\frac{1}{4}$$

因此

$$\lambda^2+\lambda-2=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=-2,\lambda_2=1$$

齐次通解

$$\tilde{y}=c_1e^{-2t}+c_2$$

$$e^t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=\frac{e^t}{2}$$

设特解为 $y_1^*=Ate^t$, 解得

$$y_1'=\frac{t}{6}e^{t^2y}+\frac{dy}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=-\frac{1}{4}$$

易见特解为 $y_2^*=\dfrac{1}{8}$

通解为

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^t+\frac{t}{6}e^t+\frac{1}{8}=\frac{c_1}{(2x-1)^2}c_2(2x-1)+\frac{2x-1}{6}\ln(2x-1)+\frac{1}{8}$$

五、

解法略, 答案为

$$\begin{pmatrix}C_1e^{2t}+\left(C_2+\frac{1}{2}\right)te^{2t}-\frac{t}{2}\\ \left(C_2+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-\frac{1}{2}\\ \left(C_2+C_3+\frac{1}{3}\right)e^{3t}-\left(C_2+\frac{1}{2}e^{2t}\right)+\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

六、

构造函数 $F(x)=e^{\sin(x)}g(x)$, 则$F'(x)=\cos(x)e^{\sin(x)}g(x)+e^{\sin(x)}g'(x)=(\cos(x))g'(x)+g'(x)e^{\sin(x)}$

由于 $g(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, $e^{\sin x}$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, 故 $F(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导,而 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续, $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续 (2)$F(0)=1,F(\pi)=3,F(2\pi)=2$, 又由于 $F(x)$ 连续, 因此必有 a,b 满足 $0<a<\pi<b<2\pi$ 使得 $F(a)=F(b)$ 且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导.

故必存在 $\xi\in(0,2\pi)$ 使得 $F'(\xi)=e^{\sin(\xi)}(g'(\xi)+g(\xi)\cos(\xi))=0$, 而$e^{\sin(\xi)}\neq0$, 故在 $(0,2\pi)$ 上至少有一点ξ, 使得 $g'(\xi)+g(\xi)\cos(\xi)=0$

七、

(1) 考虑替换 $t=-x$, 有

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx^r=x^{-k}-\int_{a}^{-a}f(-t)g(-t)dt$$

$$=\int_{-a}^{a}f(-t)g(t)dt$$

则 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx + \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]g(x)dx$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-a}^{a} g(x)dx$$

$$= A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

(2) 考虑到反正切函数的特殊性, 设 $h(x) = \arctan(e^x)$, 猜想 $h(x)+h(-x) = C$ 下面进行证明

$$\frac{d}{dx}[h(x)+h(-x)] = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0$$

$$h(x)+h(-x) = C = 2h(0) = \frac{\pi}{2}$$

由 (1) 中的结论可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \tan(\tan)(e^x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{32}$$

2020年期末真题

一、填空题

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 x^{2021} 的系数为

2. 极限 $\lim_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin}{|x|}\right]=$

3. 反常积分 $\int_1^3\ln\sqrt{\dfrac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=$

4. 设 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$

5. 极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(k+\dfrac{1}{n}\right)^2\tan\dfrac{1}{n^3}=$

二、单选题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x},x\neq0\\ \dfrac{1}{2},x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处

(A) 连续且取极大值

(B) 凑数选项

(C) 可导且导数不为 0

(D) 可导且导数为 0

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续且 $f(0)=0$, 已知 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 不可导

(B) 可导且导数不为 0

(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

3. 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解可设为 (a, b 为常数) (A) $a\mathrm{e}^x+b$

(B) $ax\mathrm{e}^x+b$

(C) $a\mathrm{e}^x+bx$

(D) $ax\mathrm{e}^x+bx$

4. 函数 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的间断点个数是

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

5. 当 $x\to0$ 时, 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 有界的但不是无穷大量

(B) 无穷大量

(C) 有界的但不是无穷小量

(D) 无穷小量

三、计算题

1. 计算极限 $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(t\sin t+\tan^3t\cdot\ln t\right)\mathrm{d}t}{\cos x\int_0^x\ln^2(1+t)\mathrm{d}t}$ 的值.

2. 讨论函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{20}}+|x|^{\frac{1}{21}}-2\cos x$ 的零点个数.

3. 求微分方程 $(y+1)y''+(y')^2=(1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的解.

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

5. 将圆周 $x^2+y^2=4x-3$ 绕 y 轴旋转一周, 求所得旋转体体积.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x+b\sin x+c, & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ x^k\sin\frac{1}{k} & ,x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微, 讨论常数 a,b,c 以及 k 的取值.

7. 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

8. 求线性微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的通解.

四、证明题

1. 已知等式两端的两个积分都收敛, 且 $a,b>0$, 求证: $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\dfrac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$.

2. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n\,(3-x_n)}(n=1,2,\ldots)$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收玫, 并求其极限.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1, \lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$. 求证:

(1) $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$;

(2) $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

2020年期末真题解析

一、填空题

1. 应用麦克劳林展开$\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$，$\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}=\ln(1-x)-\ln(1+x^3)$,由于2021无法被3整除，所以后一项的展开中不带有x^{2021}项。第一项的展开中x^{2021}的系数为$-\dfrac{1}{2021}$

2. $x>0$时，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]&=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}+1\\&=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{3}{x}}+1\\&=0+1=1\end{aligned}$$

$x<0$时，

$$\lim_{x\to0^-}[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}]=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2-1=1$$

3.

$$\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(\ln\pi-\ln|2-x|)\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\mathrm{d}x$$

根据对称性

$$\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\mathrm{d}x=\int_2^3\ln(x-2)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_0^1$$

而$\lim\limits_{x\to0^+}xlnx=0$,所以结果为$1+\ln\pi$

4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$，$y$看作$t$的函数，隐函数求导有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}e^y\sin t+e^y\cos t-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$,所以有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\dfrac{e^y\cos t}{2-y}$。所以，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$,取对数有$\ln\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\ln\cos t-\ln(6t+2)-\ln(2-y)$,两边对$t$求导有$\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\dfrac{6}{6t+2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{2-y}$, 所以有$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\dfrac{6}{6t+2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{2-y}\right)$ 代入数值，得$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=0}=\dfrac{2e^2-3e}{4}$

5. $n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\to0$,利用等价无穷小并结合积分，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k+\dfrac{1}{n})^2\tan\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2.\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$。

二、单选题

1. 首先$x\neq0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}=f(0)$,故$f(x)$在0处连续。再利用导数定义，可得$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2x^2}=\dfrac{1}{4}$,
故而函数在0处可导，导数值为$\dfrac{1}{4}$。

2. 由于

$$1-\cos x\geq0$$

故而依据题干的条件，可知$f(x)$在$x=0$的去心邻域内大于0，因此$f(x)$在$x=0$处取得极小值。

3. 特征方程为$\lambda^2-1=0$,可得特征根为±1,然后依据特征根与特解形式对应表，可得e^x对应的特解形式为axe^x,1对应的特解形式为b，故而特解可设为axe^x+b。

4. 由题意得：y（x）中$x=\pm1, x=0, x=2$处都没有定义，所以都是 $y(x)$ 的间断点，因此函数有4个间断点。

5. 取$x=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,则$y=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,当$x\to0, n\to\infty$时，$y\to\infty$,故而y是无界，同时可以发现在三角函数中，自变量趋近于零的过程中会取正，负，零三种值，这就说明y是震荡的，不是无穷大量。

三、计算题

1.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(t\sin t+\tan^3t\cdot\ln t)\mathrm{d}t}{\int_0^x\ln^2(1+t)\mathrm{d}t}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+\tan^3x\cdot\ln x}{\ln^2(1+x)}\\&=1\end{aligned}$$

2. $f(x)$是偶函数，且$f(0)=-2$,因此只需要考虑函数在$(0,+\infty)$上的零点。

当$x>1$时，$f(x)>2-2\cos x\geq0$，因此函数在$(1,+\infty)$上没有零点：

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$,因此函数在$(0,1)$上严格单调递增，从而在该区间上至多有一个零点。由介值定理，$f(1)=2-2\cos1>0$,因此函数在$(0,1)$内有且仅有一个零点。

综上，函数在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点，从而在**R**内有且仅有2个零点。

3. 记$p=y'$，则$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.方程可化为

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=(1+2y+\ln y)p,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1}$$

$$p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y+C_1)$$

由初值条件知：$C_1=0$,即$y'=\dfrac{1}{y+1}(y^2+y\ln y)$, 进而 $\ln(y+\ln y)=x+C_2$,代入初值条件得$\ln(y+\ln y)=x$.

4. 注意到$\sin x$为奇函数，因此

$$I=\int_{-1}^1\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

然后进行分母有理化结合积分的几何含义

$$I=4\int_0^1 1-\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\text{(根号中的式子可利用圆的面积快速得出)}$$

所以，$I=4-\pi$.

5. 圆周的方程为$(x-2)^2+y^2=1$.

$V=\int_{-1}^1\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^1\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=4\pi^2.$

6. 易见f在$(-\infty,0),(0,+\infty)$内均连续可微，只要讨论f在$x=0$处的性质。

由题意，$f(x)$连续可微，所以f本身连续。

而当$k\leq0$时，$f(0^+)$不存在，所以$k>0$.

而当$k>0$时，我们有$f(0^-)=c, f(0)=0, f(0^+)=0$，因此$c=0$.

又$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$,

因此，当$k \le 1$时，$f'_+(0)$不存在，从而有$k > 1$。当$k > 1$时，$f'_+(0) = 0$。另一方面，$f'_-(0) = b$，从而$b = 0$.
进一步，当$k > 1, b = 0, c = 0$时，可得

$$f(x) = \begin{cases} 2a \sin x \cos x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ kx^{k-1} \sin \frac{1}{x} - x^{k-1} \cos \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$$

当$k \le 2$时，$f'(0^+)$不存在，所以$k > 2$.
即$k > 2, b = 0, c = 0$是f在R上连续可微的必要条件。

7. $f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty), f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} \mathrm{d}t$, $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$,故$f(x)$的驻点为$x = 0, \pm 1$。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

单调增区间：$(-1, 0), (1, +\infty)$；单调减区间：$(-\infty, -1), (0, 1)$; 极小值为$f(\pm 1) = 0$,极大值为$f(0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$。

8. $det(A - \lambda E) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda = 0 \Longrightarrow)\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4,$
$\lambda = -2$:

$$A + 2E = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$\lambda = 4$:

$$A - 4E = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}.$$

对应的齐次微分方程组通解为：$x = X(t)C$。

$$X(0) \ne E, \text{计算得} X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

通解为$x(t) = X(t)X^{-1}(0)C + \int_0^t X(t - \tau)X^{-1}(0)f(\tau)\mathrm{d}\tau$。带入公式，得

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$
$$+ \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} & e^{4(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} & 0 & e^{4(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 2e^{4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} \end{bmatrix}.$$

四、证明题

1. 令$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$,则$\mathrm{d}x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$。

$I=\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}(\int_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty})f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t,$

令$t=-u$,则

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{u^2+4ab})\frac{-u+\sqrt{u^2+4ab}}{\sqrt{u^2+4ab}}\mathrm{d}u+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. 由均值不等式结合题干条件很容易得出$0<x_n<\frac{3}{2}$，$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}>1$(结合上界易得)，所以数列单调递增且有上界，故收敛。对递推关系两边取极限得极限值为$\frac{3}{2}$。

3. (1) 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，知$f(0)=0$;

且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1.$

故而$\exists a>0,f(a)>f(0)=0.$

同理，$f(1)=0,f'(1)=2,\exists b<1,f(b)<f(1)=0,$且$b\neq a.$

于是$f(a)f(b)<0$,由零点定理知，

$\exists\xi\in(a,b)\subset(0,1),$使得$f(\xi)=0.$

(2) 构造$F(x)=e^{-x}f(x)$,可知$F(0)=F(\xi)=0.$

由罗尔定理得，$\exists\xi_1\in(0,\xi)$fi$F'(\xi_1)=0;\exists\xi_2\in(\xi,1),F'(\xi_2)=0.$

而$F'(x)=e^{-1}(f'(x)-f(x)),$故$\xi_1,\xi_2$分别是$f'(x)-f(x)=0$的两个根。

构造函数$G(x)=e^x(f'(x)-f(x)),$则$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$满足罗尔定理。

故而$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1),F'(\eta)=0.$

整理得$f'(\eta)-f(\eta)=0$。

2019年期末真题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\sin x+\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)$ 的值为

2. 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$

3. 设函数 $f(x)=\left(x^2+x+2\right)\sin x$, 则 $f^{10}(0)=$

4. 若当 $x\to 0$ 时, 两个函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)dt$ 与 $g(x)=x^k\left(e^x-1\right)$ 是同阶的无穷小量, 则常数 k 的值为

5. 曲线 $y=x+\frac{1}{e^x-1}$ 的渐近线有　　条.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$, 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$.

3. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2-t\\ te^y+y+1=0\end{cases}$, 求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=x(x-2)e^x+2x$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式.

(2) $f(x)$ 的单调区间与极值.

5. 计算反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}dx$.

6. 求微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}+x$ 的通解.

7. 求初值问题 $\begin{cases}\left(1+x^2\right)y''=2xy'\\ y(0)=1,y'(0)=3\end{cases}$ 的解.

8. 求线性微分方程组 $\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}x$ 的通解.

三、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内大于 0 , 并满足 $xf'(x)=f(x)-3x^2$, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形 D 的面积为 2 , 求:

(1) 函数 $f(x)$.

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 已知 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$.

(1) 证明: $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(3) 求由 $y=f(x),x=0,x=\pi,y=0$ 所围图形的面积.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(1)=0$.

试证: 存在 $\xi\in[0,2]$, 使得 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

4. (1) 设 n 是正整数, 计算 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$.

(2) 证明对任意正实数 p, 函数极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt$ 存在.

2019年期末真题解析

一、填空题

1.

$$I = 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

2.

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4-\frac{t^2}{n^2}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

3. 记$u = x^2 + x + 2, v = \sin x$,则，$u^{(n)} = \begin{cases} 2x+1 & ,n=1 \\ 2 & ,n=2 \\ 0 & ,n\geq 3 \end{cases}$，$v^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. $f^{(10)}(x) = (uv)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(10)} + 10u^{(1)}v^{(9)} + 45u^{(2)}v^{(8)}$。将$x = 0$带入可得$f^{(10)}(x) = 10$

4. 由题意得：

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^k(e^x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^{k+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin(\sin^2 x)}{x^k(k+1)}$$

$$= a(a\neq 0)$$

比较阶数可知：$k = 2$

5. $y' = 1 - \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2}$　　$x \to 0, y' \to +\infty$故而存在铅直渐近线$x = 0$.

$x \to +\infty, y' \to 1$,所以存在斜渐近线$y = x$,

$x \to -\infty, y' \to 1$,此时得出另一条斜渐近线$y = x - 1$，综上，有三条渐近线。

二、计算题

1.

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x}$$

$$= 1$$

2. 原式$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-2x}\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{e}{2} + \frac{5}{6}$。

3. 由题意得：

$$\dot{x} = 2t - 1 \qquad \dot{y}|_{t=0} = \frac{1}{e}$$

$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -e^{-1}$,又因为切线过$(0,-1)$，故切线方程为$y = -\frac{1}{e}x - 1$。

4. (1)由$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x(x-2)e^x + 2x$得$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x(x-2)e^2 + 2x$

求导得$\int_0^x f(t) = (x^2-2)e^x + 2$ 再次求导：　$f(x) = (x^2+2x-2)e^x$

(2)$f'(x) = (x^2+4x)e^x$ 易得:单调增区间为$(-\infty,-4),(0,+\infty)$,单调减区间为（-4,0）故极大值为$f(-4) = 6e^{-4}$，极小值为$f(0) = -2$

5.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \ln\frac{t}{1+t} - \frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

6. $y''+2y'+y=0$可得通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$,对于x项，不难解出特解中需含有$x-2$Θ对于e^{-x}项，可设$y^*=Cx^2e^{-x}$，带入原方程可解得$C=\frac{1}{2}$,故而$y^*=\frac{1}{2}x^2e^{-x}+x-2$ 综上，通解为$y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}+x-2$

7. $(1+x^2)y''=2xy' \Longrightarrow \ln y'=\ln(x^2+1)+C_1 \Longrightarrow y'=C_1(x^2+1)$　　$y'(0)=3 \Longrightarrow C_1=3$　　$y'=3x^2+3$　　$y=x^3+3x+C_2$　　$y(0)=1 \Longrightarrow C_2=1$　　$y=x^3+3x+1$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}$　$det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-3,\lambda_3=0$　$r(A+3E)=2$

故需求 $(A+3E)^2r=0$ 的基础解系　$(A+3E)^2=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ 4 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

从而 $(A+3E)^2r=0$ 两个线性无关的解向量 $r_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, r_0^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

$r_1^{(1)}=(A+3E)r_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}, r_2^{(2)}=(A+3E)r_0^{(2)}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\\ -2\end{bmatrix}$

故对应 $\lambda_1=\lambda_3=-3$ 的两个线性无关特解 $x_1(t)=e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-t\\ 1+2t\\ -t\end{bmatrix}, x_2(t)=e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-2t\\ 4t\\ -2t\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_3=0$，其特征向量 $r=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$，对应特解 $x_3(t)=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 原方程组解系：$x=C_1e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-t\\ 1+2t\\ -t\end{bmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-2t\\ 4t\\ -2t\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

三、解答题

1. (1)解齐次微分方程$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=0$，得$f(x)=C_1x$ 再由常数变易法，得通解为$f(x)=-3x^2+Cx$ 由题意，得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2 \Longrightarrow C=6$ 从而$f(x)=-3x^2+6x$

(2)由$f(x)=0 \Longrightarrow x_1=0,x_2=0$，在区间$[0,2]$上取微元$\mathrm{d}x$ 则$\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x \Rightarrow V=\int_0^2 \pi f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{48\pi}{5}$

2. （1）$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t \xrightarrow{s=t+\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(s-\pi)|ds=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin s|ds \xrightarrow{x=s} f(x)$即函数以$\pi$为周期。

（2）由（1）可知函数以π为周期，故只需要讨论函数在$[0,\pi]$区间内的值域即可：$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，　$t\in$

$[0,\pi)$，　$\sin t>0$　　$\therefore f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$ $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，　$t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$f(x)=\int_x^{\pi}|\sin t|dt+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_x^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\in[2-\sqrt{2},1]$

(3)由（2）可知：$S=\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right]dx=\pi$

3. 设$f(x)$的原函数为$F(x)$，将原函数在$x=1$处泰勒展开：$F(x)=F(1)+(x-1)f(1)+\frac{1}{2}(x-1)^2f'(1)+\frac{1}{6}(x-1)^3f''(\xi)(\xi\in[1,x])$　从而$F(0)=F(1)+\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{6}f''(\xi_1)$

$$F(2)=F(1)+\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)\quad\therefore F(2)-F(0)=\frac{1}{6}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

由连续性可知：$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$　$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$ 整理得$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\in[0,2]$ 使 $f''(\xi)=3\int_0^2f(x)dx$

4. （1）$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx+\cdots+(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx$

$\because(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx=(-1)^{n-1}(-n\pi\cos(n\pi)+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi)=(2n-1)\pi$

$\therefore$ 原式$=\pi+3\pi+\cdots+(2n-1)\pi=n^2\pi$

（2）设$f(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^Pdt$。当$P>0$时，

$$f'(x)=\frac{1}{x^4}\left(x^3|\sin x|^P-2x\int_0^x t|\sin t|^Pdt\right)=\frac{1}{x^4}\left[x^3|\sin x|^P-x\left(|\sin t|^Pt^2\Big|_0^x-\int_0^x t^2d|\sin t|^P\right)\right]=\frac{1}{x^3}\int_0^x t^2d|\sin t|^P>0$$

而$f(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^Pdt<\frac{1}{x^2}\int_0^x tdt=\frac{1}{2}$　由单调有界准则知：函数极限存在。

2018年期末真题

一、选择题

1. 若 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1$ (其中 a,b 为常数), 则 ( )

A. $a=0,b\in\mathrm{R}$

B. $a=0,b=1$

C. $a\in\mathrm{R},b=1$

D. $a\in\mathrm{R},b\in R$

2. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x)<g(x)$, 则必有

A. $f(-x)>g(-x)$

B. $f'(x)<g'(x)$

C. $\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$

D. $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

3. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $(x-2)e^x$, 则 $f'(x+1)=$

A. xe^x

B. xe^{x+1}

C. $(x+1)e^{x+1}$

D. $(x+1)e^x$

4. 下列广义积分中, 发散的是（）

A. $\int_0^1\ln x dx$

B. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

C. $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

D. $\int_{-1}^1\frac{dx}{x\cos x}$

5. 设 $f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处 (　)

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导且 $F'(0)\neq 0$

D. 可导且 $F'(0)=0$

6. 微分方程 $y''+3y'+2y=(ax+b)e^{-x}$ 的特解形式为 (　)

A. $y=Axe^{-x}$

B. $y=(Ax+B)e^{-x}$

C. $y=(Ax+B)xe^{-x}$

D. $y=Ax^2e^{-x}$

二、填空题

1. 已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{t}{1+t^2}\\ y=\frac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $t=2$ 处的切线方程为

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则定积分 $\int_0^{2018}(x-[x])dx$ 的值是

3. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解是 $y=$

4. 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$

5. 设 $f(x)=(x-1)\ln(2-x)(x<2)$, 则 $f(x)$ 的最大值点是 $x=$

三、计算积分

1. 计算积分 $\int \dfrac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}dx$.
2. 计算积分 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$.
3. $\int_0^{+\infty} \dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

四、解答题

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}(x-3)y^4 = 0$ 的通解.
2. 已知 $y_1 = x, y_2 = x + e^x, y_3 = 1 + x + e^x$ 是 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ 的解, 试求此方程的通解.
3. 求曲线 $y = 3\left(1 - x^2\right)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.
4. 对 t 取不同的值, 讨论函数 $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t, +\infty)$ 上是否有最大值或者最小值? 若存在最大值或者最小值, 则求出相应的最大值和最大值点, 或者最小值和最小值点.
5. 求微分方程 $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}\cos t$ 的通解.
6. 设 $f'(x)$ 是连续函数, $F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$, 证明: $F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$.
7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 求证:

(1) $\forall t \in \mathbf{R}$, $\int_0^1 xf(x)dx = -\dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - t\right)f'(x)dx$.

(2) $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \dfrac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2 dx$, 等号当且仅当 $f(x) = A\left(x^3 - x\right)$ 时成立, A 为常数.

2018年期末真题解析

一、选择题

1. 观察分子分母的阶数，为保证极限的结果为常数，分子的阶数应该不高于分母，所以$a=0$，同时根据极限的结果可以得出$b=1$。

2. A.$f(-x)>g(-x)$错误，举反例：$x=-2$

B.$f'(x)<g'(x)$错误，举反例：常函数

D.$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$错误，举反例：$x=-1, f(x), g(x)$常函数

C.可导函数一定连续，故而：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<f(x_0)$，所以C正确。

3. $f(x)=(x-1)e^x \quad f(x+1)=xe^{x+1} \quad f'(x+1)=(x+1)e^{x+1}$

4. A、$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_0^1=-1$

B、$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

C、$\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}|_0^{+\infty}=1$

D、$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x\cos x}=\int_{0^+}^1\frac{\mathrm{d}x}{x\cos x}+\int_{-1}^{0^-}\frac{\mathrm{d}x}{x\cos x}$ 由三角函数的性质：$x>0, \frac{1}{x}<\frac{1}{x\cos x}$,所以$\int_{0^+}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散，则原函数发散。

5. $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0}f(\epsilon)x \quad \epsilon\in(0,x)$

$\because f(\epsilon)=\sin\frac{1}{\epsilon}$有界 $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(\epsilon)x=0$即$F(x)=F(0) \qquad F(x)$在$x=0$处连续

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\epsilon)x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{\epsilon}$由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{\epsilon}$不存在因此，$F(x)$在$x=0$处不可导

6. $\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2\because\mu$特征方程的单根

$\therefore y=x(Ax+B)e^{-x}$

二、填空题

1. $t=2\Rightarrow y=f(x)$经过$(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$ $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t}{1-t^2}$,带入参数值及切点坐标得切线方程为$y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

2. 对于取整函数，有这样的性质: $x\in[n,n+1)$fi$[x]=n$ 故而，有：$I=\int_0^{2018}x\mathrm{d}x-(0+1+2+3+\cdots+2017)=1009$

3. $y_1-y_3=e^{3x}, y_2-y_3=e^x$,易得$e^{3x}, e^x$为所求的两个线性无关的特解（比值即可判定）故而通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$

4. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1$

5. $f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x-1}{2-x}$,令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 当$x<1$时$f'(x)>0$,当$1<x<2$时$f'(x)<0$,故而$x=1$为极大值点。

三、计算积分

1.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{1}{\tan^2 x+9}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+\frac{\tan^2}{9}}\mathrm{d}\frac{\tan x}{3}\\&=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right)+C\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2(f(x)\sqrt{x}|_0^1 - \int_0^1 f'(x))\sqrt{x}\mathrm{d}x) \\
&= 0 - 0 - 4\int_0^1 \ln(x+1)\mathrm{d}(\sqrt{x}) \\
&\overset{t=\sqrt{x}}{=} -4\int_0^1 \ln(t^2+1)\mathrm{d}t \\
&= 8 - 2\pi - 4\ln 2(\text{再用一次分部积分法})
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
&= -x\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&\overset{t=e^{-x}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

四、解答题

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0 \Rightarrow y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} + \frac{1}{3}(x-3) = 0$ 令$u = y^{-3}$,则$u' = -3y^{-4}y'$ 故而原微分方程可化为：$u' - u = x - 3$

求得其对应的齐次微分方程的通解为$u = C_0e^x$. 由常数变易法，得$u = 2 - x + Ce^x$

所以原方程的通解为$\frac{1}{y^3} = 2 - x + Ce^x$

2. 通解为：$y = C_1e^x + C_2 + x$

3. $V = \int_{-1}^1 [9\pi - \pi(3-y)^2]dx = \int_{-1}^1 9\pi - [3 - 3(1-x^2)]^2\pi\mathrm{d}x = 18\pi - 18\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{72\pi}{5}$

4. $f'(x) = \frac{4 - 2x - 2x^2}{(2+x^2)^2}$, 令$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ 所以增区间为$(-2, 1)$,减区间为$(-\infty, =2), (1, +\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

故而，讨论如下：（1）$t \le -2$时，最大值在$x = 1$处取得，$f(1) = 1$,最小值在$x = -2$处取得，$f(-2) = -\frac{1}{2}$;

（2）$-2 < t \le -\frac{1}{2}$时，最大值在$x = 1$处取得，最大值为$f(1) = 1$,最小值在$x = t$处取得，最小值为$f(t) = \frac{1+2t}{2+t^2}$;

（3）$-\frac{1}{2} < t \le 1$时，最大值在$x = 1$处取得，最大值为$f(1) = 1$,无最小值;

（4）$t > 1$时，最大值在$x = t$处取得，最大值为$f(t) = \frac{1+2t}{2+t^2}$,无最小值。

5. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$ 故而方程的通解为$x = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$。设特解为$x^* = [(A_0 + A_1t)\cos t + (B_0 + B_1)\sin t]e^{-t}t$ 代入求得$x^* = (\frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t)e^{-t}t$ 故原方程通解为$x = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + (\frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t)e^{-t}t$。

6.

$$\begin{aligned}
F(2a) - F(a) &= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t \\
&\overset{u=2a-t}{=} \int_0^a f(2a-u)f'(u)\mathrm{d}u(\text{区间再现}) \\
&= f(2a-u)f(u)|_0^a - \int_0^a f(u)\mathrm{d}f(2a-u) \\
&= f^2(a) - f(2a)f(0) + \int_0^a f(u)f'(2a-u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

移项整理，得$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$

7. （1）

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x \quad \because \int_0^1 tf'(x)\mathrm{d}x = t\int_0^1 \mathrm{d}f(x) = t[f(1)-f(0)] = 0 \therefore -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-t)f'(x)\mathrm{d}x$$

（2）由第一问知：$[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x]^2 = \frac{1}{4}[\int_0^1 (x^2-t)^2 f'(x)\mathrm{d}x]^2$ 由柯西不等式，得 $\frac{1}{4}[\int_0^1 (x^2-t)^2 f'(x)\mathrm{d}x]^2 \le \frac{1}{4}\int_0^1 (x^2-t)^2\mathrm{d}x \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$

对照题干条件，得$(3t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

故而$(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$

当且仅当$x^2 - \frac{1}{3} = f'(x)$时取等号,代入条件得$A = \frac{1}{3}$。

2017年期末真题

一、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x|\left(x^2-1\right)}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 2^x, & x\geq 0 \end{cases}$, 求导函数 $f'(x)$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定, 求 $\mathrm{d}y$.

5. 求不定积分 $\int\sqrt{e^x+1}\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t dt$, 试求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值.

7. 求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8. 求微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解.

9. 求微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的通解.

二、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f'(t)dt+x^2$, 求 $f(x)$ 的表示式.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 在某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\quad(l>0,k$ 为正整数),试讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处是否取得极值.

3. 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

4. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\vec{x}$.

(2) 设曲线积分 $\int_{(C)}\left[f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1\right]ydx+2f'(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

5. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\y=4t-t^2\end{cases}(t\geq 0)$.

(1) 讨论曲线 L 的凹凸性.

(2) 过点 $(-1,0)$ 引曲线 L 的切线, 求切点坐标 (x_0,y_0), 并求切线的方程.

(3) 求此切线与曲线 L (对应于 $x\leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S.

6. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足: $|f''(x)|\leq M$, 且在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 取得最大值, 试证:

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leq M$$

2017年期末真题解析

一、计算题

1. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2x}}{\dfrac{1+\tan x}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2x+\sin x\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(\cos x-\sin x)}{2x(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sin x}{2(\cos x+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=1\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=-1\ \therefore x=0$为跳跃间断点

3. 当$x<0$时$f'(x)=1$，当$x>0$时$f'(x)=2^x\ln2$，当$x=0$时，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^x-1}{x}=\infty\ \therefore$在$x=0$处不可导 $f'(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2^x\ln2 & x>0\end{cases}$

4. 两边同时求导：$\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+(\dfrac{x}{y})^2}=\dfrac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)}\Rightarrow y'=\dfrac{y-x}{x+y}\ \therefore dy=\dfrac{y-x}{x+y}dx$

5. 令$t=\sqrt{e^x+1}$，则$x=\ln(t^2-1)$ 原式$=\int t\cdot\dfrac{2t}{t^2-1}dt=\int2+\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}dt=2t+\ln(t-1)-\ln(t+1)+C=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C.$

6. $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t dt=-\int_0^x\cos t de^{-t}=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x e^{-t}d\cos t=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x\sin t de^{-t}$

$=-e^{-t}\cos t|_0^x+e^{-t}\sin t|_0^x-\int_0^x e^{-t}d\sin t=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-\int_0^x e^{-t}\cos t dt=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-f(x)$

$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+\dfrac{1}{2}\quad f(0)=0\quad f(\pi)=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=e^{-x}\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\quad f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore$最大值为$\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}$，最小值为0

7. $\int_{-4}^4\pi[(\sqrt{16-x^2}+5)^2-(-\sqrt{16-x^2}+5)^2]dx=2\pi\int_0^4 10\cdot2\sqrt{16-x^2}dx=40\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$

令$x=4\sin\theta$，则原式$=40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot4\cos\theta d\theta=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta=160\pi^2$

8. 特征方程为$\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda^2+2)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=\sqrt{2}i,\lambda_2=-\sqrt{2}i,\lambda_3=1\therefore y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+C_3e^x$

9. $y''=1+y'^2$ 令$t=y'$，则$t'=1+t^2\Rightarrow\dfrac{dt}{1+t^2}=dx\Rightarrow\arctan t=x+C_1$

$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\tan(x+C_1)$

$dy=\tan(x+C_1)dx\Rightarrow y=-\ln[\cos(x+C_1)]+C_2$

二、解答题

1. 解析：$f(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt+x^2$

$f'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)+2x=2x[f(x)-f(0)]+2x$

将$x=0$代入得$f(0)=0\ \therefore f'(x)=2xf(x)+2x$

即$\dfrac{dy}{dx}=2x(y+1)\Rightarrow\dfrac{dy}{y+1}=2xdx\Rightarrow\ln(y+1)=x^2+C\Rightarrow y=e^{x^2+C}-1$

又$f(0)=0\ \therefore C=0\ f(x)=e^{x^2}-1$

2. 解析：当$k=1$时$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=l$无极值

当$k>1$时$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0$

若 k 为偶数，$\because l>0 \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}<0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_-(a)<0$

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}>0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0 \therefore x=a$ 处取得极小值

若 k 为奇数，$\because l>0 \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}<0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \Rightarrow f'_-(a)>0, f'_+(a)>0$

$\therefore x=a$处无极值

综上，k为偶数则取极小值，k为奇数则无极值.

【注：此题只告诉 $f(x)$ 在某邻域内有定义，是否可导以及导函数是否连续都未知，故不能认为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$，更不能使用洛必达法则直接求导】

3. $\lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1+i \quad \therefore$ 通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

设特解$y^*=(A\cos x+B\sin x)e^x x$ 代入求得 $y^*=\frac{x}{2}e^x\sin x$ 故 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{x}{2}e^x\sin x$

又 $y(0)=1 \quad y'(0)=1$ 故 $y=e^x\cos x+\frac{x}{2}e^x\sin x$

4. （1）见《工科数学分析》第三版上册P307例3.5

（2）$f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1=2f''(x)\Rightarrow f''(x)-9f(x)=2x^2-5x+1$

$\lambda^2-9=0\Rightarrow\lambda=\pm3$ ∴通解为$f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$

设特解$f^*(x)=Ax^2+Bx+C$ 代入求得$f^*(x)=-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{13}{81}$

故$f(x)=C_1^{3x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{13}{81}$

5. （1）定义域：$\{x|x\geq1\}$ $y''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{2t\cdot(-2)-2\cdot(4-2t)}{(2t)^3}=-\dfrac{1}{t^3}$

$\because t\geq0$

$\therefore y''<0$ 故L在$[1.+\infty)$上是凸的

（2）$y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{4-2t}{2t}=\dfrac{2}{t}-1$ ∴切线：$y-y_0=(\dfrac{t}{2}-1)(x-x_0)$

即$y-4t+t^2=(\dfrac{2}{t}-1)(x-t^2-1)$

将$(-1,0)$代入得$t^2+t-2=0\Rightarrow t=-2$或1 又$t\geq0$

$\therefore t=1$ ∴ 切点$(2,3)$ 切线方程为$y=x+1$

（3）$L:y=4\sqrt{x-1}-x+1 \quad (x\geq1)$

5.

$S=\int_{-1}^1(x+1)dx+\int_1^2[(x+1)-(4\sqrt{x-1}-x+1)]dx=2+\dfrac{5}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx=\dfrac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)d(t^2+1)$

$=\dfrac{9}{2}-\int_0^1 2t^2(4-t)dt=\dfrac{7}{3}$

6. 设$f(x)$在$x=x_0$处取最大值，$x_0\in(0,1)$，则$x=x_0$必为极值点，即$f'(x_0)=0$

$|f'(0)|+|f'(1)|=|f'(x_0)-f'(0)|+|f'(1)-f'(x_0)|=|\int_0^{x_0}f''(x)dx|+|\int_{x_0}^1 f''(x)dx|$

$\leq|\int_0^{x_0}f''(x)dx+\int_{x_0}^1 f''(x)dx|=|\int_0^1 f''(x)dx|\leq\int_0^1|f''(x)|dx\leq\int_0^1 Mdx\leq M$

2016年期末真题

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^3 dt & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$, 则 $f'(x)=$

3. 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=$? 处取得极值.

4. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+x^4}+\cos^3 x\right)dx=$

5. 微分方程 $x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0$ 的通解为

6. 微分方程 $xdy+(y-\sin x)dx=0$ 满足 $y|_{x=\pi}=1$ 的特解 $y=$

二、选择题

1. 下列结果中不成立的是 ( )

A. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=1$

B. $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

C. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

D. $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 ( )

A. $0<dy<\Delta y$

B. $0<\Delta y<dy$

C. $\Delta y<dy<0$

D. $dy<\Delta y<0$

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是 ( )

A. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

B. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

C. $\int_0^x f\left(t^2\right)dt$

D. $\int_0^x f^2(t)dt$

三、计算题

1. 求极限 $l=\lim_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

5. 求函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点, 并说明间断点类型.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\frac{x^2}{2}+e^{-x}-1$, 求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

2. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 求方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的通解.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x) = f(x) + 3x^2$, 求 $f(x)$, 使由曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1$, $y = 0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x), f(0) = 0$, 证明: 对于满足不等式 $0 < a < b < a + b < c$ 的 a, b, 有 $f(a) + f(b) \geq f(a + b)$.

2016年期末真题解析

一、填空题

1. 解析：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^3 dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{3x^2}=0=f(0)\quad \therefore a=0$

2. 解析：$f(x)=\ln x+1\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 3. 解析：特值法，取$f(x)=2(x-x_0)^4+f(x_0)$满足题意，则易知$f(x)$在x_0处取极小值

4.$\dfrac{4}{3}$ 解析：$\because \dfrac{\sin x}{1+x^4}$为奇函数 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^4}dx=0$ 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)d\sin x=\dfrac{4}{3}$

5. $y^2=C(x^2+1)-1$ 解析：$x(1+y^2)dx=y(1+x^2)dy\Rightarrow\dfrac{xdx}{1+x^2}=\dfrac{ydy}{1+y^2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)=\dfrac{1}{2}\ln(y^2+1)+C_1$

6. $xdy+ydx=\sin dx\Rightarrow\int dxy=\sin xdx\Rightarrow xy=-\cos x+C$ 又 $y(\pi)=1\therefore C=\pi-1$

二、选择题

1. A

解析：A：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{cosx}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{1}=-1$

B：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

C：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

D：$\lim\limits_{x\to 0}x=0$且$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$有界，$\therefore\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2. A

解析：$dy=f'(x)dx\quad\because\Delta x>0\therefore dx>0fidy>0$

由泰勒展开：$\Delta y=f'(x)\Delta x+\dfrac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2+o\left[(\Delta x)^2\right]>f'(x)\Delta x>f'(x)dx=dy$

3. B

解析：$\int_0^{-x}t\left[f(t)+f(-t)\right]dt$ 令$a=-t$，则原式为$\int_0^x -a\left[f(-a)+f(a)\right]\cdot(-1)da=\int_0^x a\left[f(a)+f(-a)\right]da$

也可由偶函数的导数是奇函数，将各式求导后判断其是否为奇函数

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}\quad\because\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$

$\therefore$ ffl$=e$

2.$\dot{x}=-2t\qquad\ddot{x}=-2\ \dot{y}=1-3t^2\qquad\ddot{y}=-6t$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{-2t\cdot(-6t)-(-2)\cdot(1-3t^2)}{(-2t)^3}=-\dfrac{3t^2+1}{4t^3}$

3. $y'=-e^y-xe^y\Rightarrow y'=\dfrac{-e^y}{1+xe^y}=-e\therefore$切线为 $y-1=-e(x-0)$ 即 $y=-ex+1$

4. 令 $t=\sqrt{x-1}$ 则 $x=t^2+1$

$I=\int_1^\infty\dfrac{1}{(t^2+1)t}\cdot 2tdt=\int_1^\infty\dfrac{2}{t^2+1}dt=2\arctan t|_1^\infty=\dfrac{\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x+1}{-1}=-1\quad\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x+1}{1}=1$

$\therefore x=1$为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1-x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}-x=0$

四、解答题

1. 令 $a=t-x$ 则 $\int_{-x}^{0} f(a)da=-\frac{x^2}{2}+e^{-x}-1$

两边同时求导：$-f(-x)\cdot(-1)=-x-e^{-x}\Rightarrow f(-x)=-e^{-x}-x\Rightarrow f(x)=x-e^{x}$

设渐近线为 $y=kx+b$ 则 $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-e^{x}}{x}=1\quad\therefore k=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x-e^{x}-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}-e^{x}=0$

2. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

（1）$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=-1$

$A-2E=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A+E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}r_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-t}+C_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-t}$

（2）$\lambda^2+2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-1\quad$∴通解为$y=e^{-x}(C_1+C_2x)$

设特解$y^*=x^2(Ax+B)e^{-x}\quad$代入求得$y^*=\frac{1}{3}x^3e^{-x}\quad$故$y=e^{-x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{3}x^3e^{-x}\quad\therefore y=x$

3. $xy'=y+3x^2\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=3x$

先求 $y'-\frac{1}{x}y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=\ln x+C_1\Rightarrow y=C_2x$

令$y=h(x)x$代入得：$h'(x)x+h(x)-h(x)=3x\Rightarrow h'(x)=3\Rightarrow h(x)=3x+C_3\therefore y=(3x+C)x$

$V=\int_0^1\pi[(3x+C)x]^2dx=\pi\int_0^1(3x^2+Cx)^2dx=\pi(\frac{9}{5}x^5+\frac{6C}{4}x^4+\frac{C^2}{3}x^3)|_0^1=\pi(\frac{9}{5}+\frac{6}{4}C+\frac{C^2}{3})$ 当 $C=-\frac{9}{4}$时V最小 $\therefore f(x)=3x^2-\frac{9}{4}x$

4. 由中值定理：$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi_1)\quad\xi_1\in(0,a)$

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}=f'(\xi_2)\quad\xi_2\in(b,a+b)\quad\therefore-f(a)+f(0)+f(a+b)-f(b)=-af'(\xi_1)+af'(\xi_2)$

即$f(a+b)-f(a)-f(b)=a[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\quad\because\xi_2>\xi_1\quad\therefore f'(\xi_2)\le f'(\xi_1)$

【注：单调减不等同于严格单调减，可能出现$f'(x_1)=f'(x_2)$】

$f(a+b)-f(a)-f(b)\le0\quad f(a)+f(b)\ge f(a+b)$

2015年期末真题

一、填空题

1. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln \frac{2-x}{2+x} + \cos^2 x\right) dx =$

2. 设函数 $y = x2^x$ 在 $x = x_0$ 点处取得极小值, 则 $x_0 =$

3. 计算极限 $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right] =$

4. 设函数 $y = y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xydx = x^2 + y$, 则 $y(x) =$

5, 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, $\varphi(0) = b, a > 0$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处取得极大值 $\varphi(a) = 0$, 则积分 $\int_0^a x\varphi''(x)dx =$

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 ( )

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数

B. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 为单调递增函数时, $F(x)$ 必为单调递增函数

2. 曲线 $y = (x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是 ( )

A. $(1, 0)$

B. $(2, 0)$

C. $(3, 0)$

D. $(4, 0)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 令 $M = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, 则必有 ( )

A. $M \le \int_0^1 |f(x)|dx \le 3M$

B. $\frac{M}{2} \le \int_0^1 |f(x)|dx \le M$

C. $\int_0^1 |f(x)|dx \le \frac{M}{2}$

D. $\int_0^1 |f(x)|dx \ge 3M$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 下列函数中以 T 为周期的函数是 ( )

A. $\int_0^x f(t)dt$

B. $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$

C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$

D. $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ( )

A. 0

B. 2

C. 1

D. 4

三、解答题

1. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1)$ 的渐近线.

2. 设函数 $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$, 试求:

(1) $F(x)$ 的极值.

(2) 曲线 $y = F(x)$ 的拐点的横坐标.

(3) 计算 $\int_{-2}^{3} x^2 F'(x)dx$.

3. 求解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$.

4. 求一个以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程, 并求方程的通解.

5. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$ 的通解.

6. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}(x \geq 0)$ 上点 A 作切线, 使该切线与曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积 $S = \frac{3}{4}$.

(1) 求点 A 的坐标.

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 设 a, b 均为常数且 $a > -2, a \neq 0$, 问 a, b 为何值时, 有:

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right] dx = \int_0^1 \ln\left(1 - x^2\right) dx$$

2015年期末真题解析

一、填空题

1. $\because \ln\frac{2-x}{2+x}$为奇函数 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{2-x}{2+x}dx = 0$ 原式$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$

2. $y' = 2^x + x2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\ln 2}$

当$x > -\frac{1}{\ln 2}$时$y' > 0$；当$x < -\frac{1}{\ln 2}$时$y' < 0$　$x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$为极小值点 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}} < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

右边$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$

左边$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$ $\therefore$原式$= \frac{2}{3}$

4. 原式可等价为$\int_0^x ty(t)dt = x^2 + y \Rightarrow xy = 2x + y' \Rightarrow y' - xy = -2x$

$y' - xy = 0 \Rightarrow y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ 令$y = g(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$代入得$g(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C_1 \therefore y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2} + 2$

又$x = 0$时$y = 0 \therefore y = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$

5, $\int_0^a x\varphi''(x)dx = \int_0^a xd\varphi'(x) = x\varphi'(x)|_0^a - \int_0^a \varphi'(x)dx = a\varphi'(a) - 0 - [\varphi(a) - \varphi(0)]$

又$\varphi'(a) = 0\ \varphi(a) = 0$ $\therefore$原式$= b$

二、选择题

1. $F(x) = \int f(x)dx + C$

对A：$f(x) = -f(-x)$　$F(-x) = \int f(-x)d(-x) + C = \int f(x)dx + C = F(x)$为偶函数

对B：$f(x) = f(-x)$　$F(-x) = \int f(-x)d(-x) + C = -\int f(x)d(x) + C \neq -F(x)$

对C：取$f(x) = \sin x + 1$则$F(x) = -\cos x + x + C$不为周期函数

对D：取$f(x) = -e^{-x}$则$F(x) = e^{-x} + C$为单调递减函数

2. $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$ 草图：

拐点为凹凸区间分界点，由草图知$x = 1$不是分界点，$x = 2$可能是分界点，故选B 3.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，且 $f(0) = 0$，令 $M = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$，则必有 (　)

A. $M \le \int_0^1 |f(x)|dx \le 3M$

B. $\frac{M}{2} \le \int_0^1 |f(x)|dx \le M$

C. $\int_0^1 |f(x)|dx \le \frac{M}{2}$

D. $\int_0^1 |f(x)|dx \ge 3M$

3. 由中值定理：$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \le M$　$\xi \in (0,x)$　$\therefore f(x) \le Mx$

$\int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 |Mx|dx = M\int_0^1 xdx = \frac{M}{2}$ 4.设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，下列函数中以 T 为周期的函数是 (　)

A. $\int_0^x f(t)dt$

B. $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$

C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$

D. $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

4. 采用特值法，取$f(x)=\sin x+1$

对A：原式$=-\cos x+x+1$不是周期函数对B：原式$=2-2\cos x$是周期函数

对C：原式$=\cos x+x-1$不是周期函数对D：原式$=2x$不是周期函数

证明：令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ $f(t+T)=f(t)$

$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)dt$，令$t=u+T$，$\int_0^{x+T} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(u+t)du=\int_{-T}^{x} f(u)du=\int_{-T}^{x} f(t)dt$故A和C错误

令$g(x)=\int_{-x}^{0} f(t)dt$，$g(x+T)=\int_{-x-T}^{0} f(t)dt$，令$t=u-T$，$\int_{-x-T}^{0} f(t)dt=\int_{-x}^{T} f(u-T)du=\int_{-x}^{T} f(t)dt$

故$\int_0^{x+T} f(t)dt-\int_{-x-T}^{0} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(t)dt-\int_{-x}^{T} f(t)dt=\int_{-T}^{0} f(t)dt+\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt-\int_0^T f(t)dt$

$=\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt=F(x+T)-g(x+T)$ 故B正确

5. $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0\Rightarrow x=0$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=0\Rightarrow$渐近线：$y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=\infty\Rightarrow$渐近线：$x=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=\infty\Rightarrow$设斜渐近线为$y=kx+b$

则$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(e^{-x}+1)+x]$

令$t=e^{-x}+1$则$\lim\limits_{t\to+\infty}[\ln t-\ln(t-1)]=0$

$\therefore y=-x$ 故共有3条渐近线：$y=-x;x=0;y=0$

2. 1）$F'(x)=2xe^{-x^4}=0\Rightarrow x=0$

当$x<0$时$F'(x)<0$；$x>0$时$F'(x)>0$ $\therefore F(0)=0$为极小值

（2）$F''(x)=2e^{-x^4}+(-4x^3)\cdot 2xe^{-x^4}=0\Rightarrow 2-8x^4=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F''(x)$在$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$左右异号故拐点横坐标为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3）$\int_{-2}^{3} x^2F'(x)dx=\int_{-2}^{3} 2x^3e^{-x^4}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^4}|_{-2}^{3}=\frac{e^{-16}-e^{-81}}{2}$

3. 令$y'=u$则$y''=u'$，$y''=u\frac{du}{dy}$

$y''=e^{2y}\Rightarrow u\frac{du}{dy}=e^{2y}\Rightarrow udu=e^{2y}dy\Rightarrow\frac{u^2}{2}=\frac{1}{2}e^{2y}+C_1$

又$x=0$时$u=1$fi$y=0$ $\therefore C_1=0$ $u^2=e^{2y}\Rightarrow u=e^y$

$\frac{dy}{dx}=e^y\Rightarrow\frac{dy}{e^y}=dx\Rightarrow -e^{-y}=x+C_2$

$x=0$时$y=0$ $\therefore C_2=-1$ 故$e^{-y}=1-x$即$y=-\ln(1-x)$

4. 通解$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2i,\lambda_4=-2i$

$\therefore(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0\Rightarrow\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$ 故$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''-8y'+4y=0$

5. $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$ $\therefore$通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设特解$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$ 代入得$y^*=-x(x+2)e^{2x}$ 故$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(x+2)e^{2x}$

6. （1）$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 切线：$y-\sqrt[3]{x_0}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)$

$$S=\int_{-2x_0}^{0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}\right]dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right]dx$$

$=(\frac{1}{6}x_0^{-\frac{2}{3}}x^2+\frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}}x)|_{-2x_0}^{x_0}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}|_0^{x_0}=\frac{3}{4}x_0^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\Rightarrow x_0=1$ $\therefore A(1,1)$

（2）切线：$y-1=\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Rightarrow$切线过$(-2,0)$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 - \int_0^1 \pi(\sqrt[3]{x})^2 dx = \frac{2}{5}\pi$

7. $\int_0^1 \ln(1-x^2)dx = x\ln(1-x^2)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} \cdot (-2x)dx = x\ln(1-x^2)|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2-1}dx$

$= x\ln(1-x^2)|_0^1 - \int_0^1 (2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx = \left[x\ln(1-x^2) - 2x - \ln|x-1|\right] + \ln|x+1||_0^1$

$= \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\ln|x-1| + (x+1)\ln(x+1) - 2x\right] = 2\ln 2 - 2$

$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1\right]dx = \int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx = \int_1^{+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{2+a-b}{2x+b})dx$

$= \left[\ln x - \frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x - \frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x - \frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{(2x+a)^{1+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}}$存在 $\therefore 1 + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow a = b$

上式$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+a} = -\ln 2 \therefore -\ln 2 + \ln(2+a) = 2\ln 2 - 2 \Rightarrow a = \frac{8}{e^2} - 2$

2014年高数期末真题

一、计算题

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

2. 已知 $\int_1^{\cos x} f(t)dt=\cos 2x$, 其中 $f(t)$ 连续, 求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1)$, 求 dy.

4. 求不定积分 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

5. 求定积分 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

6. 求微分方程 $(1+y)dx+\left(x+y^2+y^3\right)dy=0$ 的通解.

7. 求微分方程 $x''+3x'+2x=e^{-2t}$ 的通解.

8. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 验证微分方程组 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1\\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 通解

$$\vec{x}=C_1\begin{pmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},t\in R$$

(2) 验证 $y_1=e^x, y_2=e^x\ln|x|$ 是微分方程 $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0$ 的解, 并求其通解.

9. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}dx$.

二、解答题

1. 当 $x\in[-1,1]$ 时, 确定函数 $f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|\left(x^2-1\right)}$ 的间断点及其类型.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\int_0^x\sin t^2dt & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

3. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A=\begin{pmatrix}8&4&-1\\4&-7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}$.

(2) 已知函数 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解, 试确定 a,b,c, 并求该方程的通解.

4. 设曲线 l_1 的方程为 $y=a\ln x$ (其中常数 $a>0$), 曲线 l_1 的一条切线 l_2 过原点.

(1) 求曲线 l_1, 切线 l_2 以及 x 轴围成的平面图形的面积.

(2) 求此平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证明:对 $\forall x\in(0,l),\exists\theta\in(0,1)$, 使 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\theta$.

2014年高数期末真题解析

一、计算题

1.原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=\dfrac{4}{3}$

2.两边对x求导：$-\sin x f(\cos x)=-2\sin 2x\Rightarrow f(\cos x)=4\cos x\Rightarrow f(x)=4x\therefore f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}$

3.$y'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{-1}{1-x})-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2}=-\dfrac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\therefore dy=-\dfrac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}dx$

4.令$t=\sqrt{e^x+1}$则$x=\ln(t^2-1)$ 原式$=\int\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{2t}{t^2-1}dt=\int(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1})dt=\ln\dfrac{t-1}{t+1}+C=\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

5.令$x=\cos\theta$，则原式$=\int_{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}\tan^2\theta d\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\arctan\sqrt{2}$

6.令$u=x(1+y)$则$du=(1+y)dx+xdy$ 原方程变为$du+(y^2+y^3)dy=0\Rightarrow u=-\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^3}{3}+C$

故$x(1+y)=-\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^3}{3}+C$

7.$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ ∴通解为$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

设特解$x^*=Ate^{-2t}$ 代入得$x^*=-te^{-2t}$ 故$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}-te^{-2t}$

8.（1）见《工科数学分析》第三版上册P299例3.1

（2）将$y_1=e^x,y_2=e^x\ln|x|$代入方程成立

e^x与$e^x\ln|x|$线性无关，故其线性组合即为齐次方程的通解$y=C_1e^x+C_2e^x\ln|x|$

9.原式$=\int_1^{+\infty}(-\dfrac{1}{2}\ln x)d\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}d(-\dfrac{1}{2}\ln x)=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx=\dfrac{1}{4}$

二、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\pi x}{x(x^2-1)}=-\pi$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi x}{-x(x^2-1)}=\pi\therefore x=0$为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin\pi x}{(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi\cos\pi x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}\therefore x=1$为可去间断点

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-\sin\pi x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi\cos\pi x}{2x}=-\dfrac{\pi}{2}\therefore x=-1$为可去间断点

$\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}\dfrac{\tan\pi x}{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-1)}=\infty\therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$为无穷间断点

2.当$x\neq0$时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}(\int_0^x\sin t^2dt+\sin\dfrac{1}{x})\sin x^2$ 当$x=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt+(\sin\frac{1}{x})\sin x^2}{1}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}$

$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，且$\cos\dfrac{1}{x}$有界

$\therefore f'(0)=0$ 又$\because\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0\therefore f'(x)$在$x=0$处连续

3.（1）$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}8-\lambda&4&-1\\4&-7-\lambda&4\\-1&4&8-\lambda\end{vmatrix}=-\Phi\lambda+9)(\lambda-9)^2=0\Rightarrow\lambda_1=-9,\lambda_2=9$

$$A+9E=\begin{bmatrix}17&4&-1\\4&2&4\\-1&4&17\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}r_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$A-9E=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\4&16&4\\-1&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}r_3=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}e^{-9t}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{9t}+C_3\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}e^{9t}$$

（2）将特解代入：$4e^{2t}+(x+3)e^x+a\left[2e^{2x}+(x+2)e^x\right]+b\left[e^{2x}+(x+1)e^x\right]=Ce^x$

$$\therefore\begin{cases}4+2a+b=0\\3+2a+b=c\\1+a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\\c=-1\end{cases}\quad y''-3y'+2y=-e^x\ \lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$$

∴通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 由题知特解$y^*=xe^x$ 故$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

4.（1）切线：$y-a\ln x_0=\frac{9}{x_0}(x-x_0)$过原点$\Rightarrow x_0=e$　　切点 (e,a)

$$\therefore l_2:y=\frac{9}{e}x\qquad S=\int_0^e\frac{a}{e}x\,dx-\int_1^e a\ln x\,dx=\frac{ea}{2}-1$$

（2）$V=\int_0^a\pi\left[e\frac{2y}{a}-(\frac{ey}{a})^2\right]dy=(\frac{ae^2}{2}-\frac{a}{2})\pi$

5.（1）令$F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt$　　由中值定理：$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(\theta x)(0<\theta<1)$ 即 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$

（2）对（1）中等式两边求导：$f(x)-f(-x)=f(\theta x)-f(-\theta x)+x\left[\theta f'(\theta x)+\theta f'(-\theta x)\right]\Rightarrow\frac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]$

即 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]=2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[f'(x)+f'(-x)-\theta f'(\theta x)-\theta f'(-\theta x\right.$

$2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\therefore 2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta=2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\frac{1}{2}$

2013年期末真题

一、计算题

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x sinx - x(x+1)}{1-cosx}$

2.设 $x \geq 0, \int_0^{x^2+x} f(t)\mathrm{d}t = x^2$ 其中 $f(x)$ 连续，求 $f(2)$

3.设 $y = \sin^2 3x + \cos\dfrac{x^2}{5} + \tan\sqrt{x}$,求 y'.

4.求不定积分 $\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$

5.求定积分 $\int_{-3}^{3}(|x|+x)e^{-|x|}\mathrm{d}x$

6.求微分方程 $xy' - y = x^3\cos x$ 的通解.

7.求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

8.计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

二、解答题

1. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x < 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x > 0 \end{cases}$$

的间断点及其类型

2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$。试求：

(1) $f'(x)$

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处的连续性

3. (学习高数 I 者做(1)，学习高数 II 者做(2))

(1) 求线性微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 设函数 u 的全微分 $du = [3f(x) + e^x]\,ydx + [2f'(x) + f(x)]\,dy$，其中 $f(x) \in C^{(2)}$，且 $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{5}$，求 $f(x)$

4. 以椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t (0 \leq t \leq 2\pi, 0 < b < a)$ 的长轴为底，作一个与上半椭圆内接的等腰梯形，试求它的面积的最大值

5. 设函数 $f \in C^{(1)}[a,b]$, $f'(x) \leq M$ (M 为常数)，且 $f(a) = 0$，证明：

(1) $\int_a^b f(x)dx \leq \dfrac{1}{2}M(b-a)^2$

(2) $\int_a^b f^2(x)dx \leq \dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$

2013年期末真题解析

一、计算题

1.原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+\cos x)e^x-2x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{\cos x}=0$

2.两边求导 $(2x+1)f(x^2+x)=2x\Rightarrow f(x^2+x)=\dfrac{2x}{2x+1}\quad x=1,\quad ßf(2)=\dfrac{2}{3}$

3.$y'=6\sin 3x\cos 3x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}=3\sin 6x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4.原式 $=\dfrac{1}{4}\int\ln x\mathrm{d}x^4=\dfrac{1}{4}[x^4\ln x-\int x^4\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x]=\dfrac{1}{4}(x^4\ln x-\dfrac{x^4}{4})+c$

5.原式= $\int_{-3}^{3}|x|e^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^3 xe^{-x}\mathrm{d}x=-2\int_0^3 x\mathrm{d}e^{-x}=-2[xe^{-x}|_0^3-\int_0^3 e^{-x}\mathrm{d}x]=-2(3e^{-3}+e^{-3}-1)=-8e^{-3}+2$

6.先求 $xy'-y=0\Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y=C_1x$, 设$y=h(x)x$ 带入原方程

$x[xh'(x)+h(x)]-xh(x)=x^3\cos x\Rightarrow x^2h'(x)=x^3\cos x\Rightarrow h(x)=x\sin x+\cos x+C_2$

7.$\lambda^2-2\lambda+5=0\Rightarrow\lambda=1\pm 2i\Rightarrow y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

8.令 $t=\sqrt{x}$ 则 $x=t^2$ 原式 $=\int_0^{+\infty}2te^{-t}\mathrm{d}t=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}e^{-t}=-2[te^{-t}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t]=-2[te^{-t}+e^{-t}]|_0^{+\infty}=-2$

二、解答题

1 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}=-\dfrac{2}{\pi}\quad\Rightarrow x=-1$为可去间断点

$t=-3,-5,-7\cdots,-(2k+1),\quad\lim\limits_{x\to t}f(x)=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\infty\quad\Rightarrow x=-3,-5,-7,\cdots,-(2k+1),k\in N^+$ 为无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $f(x)$ 在[1,-1]内振荡 $\Rightarrow$ x=2 为振荡间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^\circ}\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=0\Rightarrow x=0$ 为跳跃间断点

2.（1）当 $x\neq 0$fi$f'(x)=\dfrac{x[g(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

当x=0时，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2} & x=0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}-g'(x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(0)-1}{2}=f''(0)$

$\Rightarrow f'(x)(x=0\Xi\qquad Sx\text{‘}0fif'(x)>6\quad Ef'(x)((-\infty$fi$+\infty)\Omega$

3.(1) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -2\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ -2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(3-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$A-3E=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\1&-5&1\\-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$A+3E=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{3t}+C_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}e^{-3t}$$

(2) $3f(x)+e^x=2f''(x)+f'(x)\Rightarrow 2f''(x)+f'(x)-3f(x)=e^x\quad 2\lambda^2+\lambda-3=0\Rightarrow\lambda_1=-\frac{3}{2},\lambda_2=1$

$\Rightarrow$通解为 $f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x$ 设特解为 $f^*(x)=Axe^x$

带入得： $f^*(x)=\frac{x}{5}e^x\quad\Rightarrow f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x+\frac{x}{5}e^x$

又$f(0)=1f'(0)=\frac{1}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{5}e^{-\frac{2}{3}x}+\frac{3}{5}e^x+\frac{x}{5}e^x$

4.设 $D(a\cos t,a\sin t),t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 则 $S=\frac{(2a\cos t+2a)b\sin t}{2}=ab\sin t\cos t+ab\sin t$

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=ab(2\cos^2t+\cos t-1),\cos t\in(0,1),\quad\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\cos t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$

故当 $0>t>\frac{\pi}{3}$ 时， $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}<0$ ；当 $\frac{\pi}{3}>t>\frac{\pi}{2}$ 时， $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$

$\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$ 时取最大值，$S_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

5.(1)由中值定理： $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)\le M$

其中 $\xi\in(a,x),f(a)=0\quad\Rightarrow f(x)\le M(x-a)\quad\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}(b-a)^2$

(2)由柯西不等式： $f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\le\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\int_a^x\mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t$

$\Rightarrow\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left[(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$

2012年期末真题

一、填空题

1.函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调递减区间为:( )

2.若$f(x)$在x=0处连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $f(0)=(),f'(0)=$( )

3.若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geq0\\ \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} & x<0\end{cases}$ 有可去间断点x=0,则a=:( )

4.设$f(x)=\begin{cases}e^{ax} & x\leq0\\ b(1-x^2) & x>0\end{cases}$ ($(-\infty,+\infty)$可微，则a=:( ), b=:( )

5.设$x\to0$时，$f(x)=\ln(1+ax^2)$与 $g(x)=\sin^2 3x$ 是等价无穷小，则 $a=$( )

二、计算题

1.求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

2.求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}+\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x)^2dx$ 的单调性和极值

3.求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

4.求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$的通解

5.求微分方程$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$的通解

6.设由曲线 $y=\cos x$ (其中 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$) 及x轴，y轴所围成平面图形的面积被曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 二等分

(1)确定 a 的值

(2)求曲线 $y=\cos x,y=a\sin x$ 及x=0所围平面图形绕x轴旋转一周所成的立体的体积

7.设函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且$f(0)=0$,问：

(1)a:U<fi$F(x)(x=0\Xi$

(2)$F'(x)((-\infty,+\infty)\Omega'$

8.(f‘pIIIZ(1)fi$f$‘pIIIZ(2))

(1)求线性微分方程组$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$,其中$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$

(2)求微分方程$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=4e^t$的通解

9.$f(x)([a,b]\Omega(a>0,b>0)$, 且满足方程 $2\int_a^{\frac{a+b}{2}}e^{\lambda(x^2-b^2)}f(x)dx=(b-a)f(b)$ 证明：存在$\xi\in(a,b)$,使$2\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

10.设微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

(1)证明：若$1+P(x)+Q(x)=0$则方程有一特解$y=e^x$； $P(x)+xQ(x)=0$则方程有一特解$y=x$

(2)根据(1)的结论，求$(x-1)y''-xy'+y=0$的通解和满足初始条件$y(0)=2,y'(0)=1$的特解

(3)求$(x-1)y''-xy'+y=1$满足初始条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[y(x)-1]}{x}=-1$的特解

2012年期末真题

一、填空题

1.$(0, \frac{1}{4})$

解析:$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{4}$

2.$f(0)=0; f'(0)=2$

解析:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$

3.$a=1$

解析:$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$

4.$a=0, b=1$

解析:$f(x)$在 $x=0$处连续: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax}=1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} b(1-x^2)=b$ $\therefore b=1$

$f'(x)$在$x=0$处连续: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b(1-x^2)-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=0\Rightarrow a=0$

5.$a=9$

解析:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^2}{(3x)^2}=\frac{a}{9}=1\Rightarrow a=9$

二、计算题

1.原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}$

2.$\because$ 函数

$$f(x)=\frac{x^2-5}{x-3}+\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)^2 dx$$

$$\therefore x-3\neq 0 \text{ 且 } 1-x^2\geq 0$$

解得函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$ 又: 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)^2 dx$ 是常数，$\therefore$ 它的导数为 0 .

$$f'(x)=\frac{2x(x-3)-\left(x^2-5\right)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}.$$

$$\because -1\leq x\leq 1$$

$$\therefore x-1\leq 0, x-5<0, (x-3)^2>0$$

$$\therefore f'(x)\geq 0.$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无极值.

$x=1$时取极大值$f(1)=2+\int_{-1}^{1}(1+2x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=2+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=4; x=5$时取极小值$f(5)=12$

3.原式$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\int_t^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$，令$t=\tan\theta$，则原式$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \overset{u=sin}{\rightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-u)(1+u)}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

4.$y'+xy=x^3y^2 \Rightarrow y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3$，令$u=y^{-2}$，则$u'=-2y^{-3}y'$

$\therefore -\frac{1}{2}u'+xu=x^3 \Rightarrow u'-2xu=-2x^3$

先求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2xu=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u}=2x\mathrm{d}x \Rightarrow u=c_1e^{x^2}$ 设$u=h(x)e^{x^2}$，则$[h'(x)+2xh(x)]\,e^{x^2}-2xh(x)e^{x^2}=-2x^3$

$h'(x)=-2x^3e^{-x^2} \Rightarrow h(x)=(x^2+1)e^{-x^2}+c_2 \therefore u=x^2+1+ce^{x^2}$

5.$\lambda^2+4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=-2\pm i \therefore x=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$

6.(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$ $\quad \begin{cases} y=\cos x \\ y=a\sin x \end{cases} \Rightarrow x=\arctan\frac{1}{a}$

$\therefore \int_0^{\arctan\frac{1}{a}}(\cos x-a\sin x)\mathrm{d}x=\sqrt{a^2+1}-a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{4}$

(2)$V=\int_0^{\arctan\frac{4}{3}}\pi(\frac{3}{4}\sin x)^2\mathrm{d}x+\int_{\arctan\frac{4}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{7}{32}\pi\arctan\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\pi$

7.(1)$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{f(0)}{2}=0$

(2)$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(x)\mathrm{d}t}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}$

当$x\neq0$时，$F'(x)=\frac{x^3f(x)-2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4}$ $\quad \lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3}=\frac{f'(0)}{3}=F'(0) \therefore F'(x)((-\infty,+\infty)\Omega$

8.(1)$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & -2\\ -3 & -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(6-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\lambda_2=6$

$A-2E=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$A-6E=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t+}C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{2t}+C_3\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}e^{6t}$

(2)$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2 \therefore$ æ:$x=C_1e^t+C_2e^{2t}$

设特解为$x^*=Ate^t$ 代入得:$x^*=-4te^t$ 故$x=C_1e^t+C_2e^{2t}-4te^t$

9.由积分中值定理: $2\cdot e^{\lambda(\eta-b^2)}f(\eta)\cdot(\frac{a+b}{2}-a)=(b-a)f(b) \Rightarrow f(\eta)e^{\lambda(\eta-b^2)}=f(b)$ $\quad \eta\in(a,\frac{a+b}{2})$

令$g(x)=f(x)e^{\lambda(\eta^2-b^2)}$，则$g(\eta)=g(b)$又$g(x)$ $[a,b]$ $\exists\xi\in(\eta,b),g'(\xi)=0$

即$[f'(\xi)+2\lambda\xi f(\xi)]\,e^{\lambda(x^2-b^2)}=0 \Rightarrow f'(\xi)+2\lambda\xi f(\xi)=0$

10.(1)将$y=e^x$代入得:$e^x+P(x)e^x+Q(x)e^x=0 \Rightarrow 1+P(x)+Q(x)=0$

将$y=x$代入得:$P(x)+Q(x)x=0$

(2)$\because (x-1)y''-xy'+y=0$满足$1+P(x)+Q(x)=0,P(x)+Q(x)x=0$ 由(1)知$y=e^x,y=x$为方程的特解故通解为$y=C_1e^x+C_2x$，

又$y(0)=2,y'(0)=1$ $\quad y=2e^x-x$

(3)由(2)知通解为$y = C_1e^x + C_2x$ 观察得特解可取$y^* = 1$

$$\therefore y = C_1e^x + C_2x + 1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln[y(x)-1]}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y'(x)}{y(x)-1} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \quad \therefore y = e^x - 2x + 1$$

考研助手 彭康学

2011年期末真题

一、填空题

1.$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 3x^2-2x+k & x\geq 0\end{cases}$ 在x=0处连续，则常数k=( )

2.$\int_{-2}^{2}(1+x)\sqrt{4-x^2}dx$ =( )

3.微分方程$y^{(3)}+y=0$ 的通解是:( )

4.$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ =( )

二、选择题

1.设周期函数$f(x)((-\infty,+\infty)$内可导，其周期为4，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线$y=f(x)((5,f(5))$处的切线的斜率为 ( )

A. 2

B. -2

C. 1

D. -1

2.微分方程$y''-y=e^x+1$的一个特解应有形式(a,b为常数) ( )

A.ae^x+b

B.axe^x+bx

C.ae^x+bx

D.axe^x+b

3.$f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$的可去间断点的个数是( )

A.0

B.1

C.2

D.3

4.设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$, 则以下说法中正确的有

A.$I_1>I_2>1$

B.$1>I_1>I_2$

C.$I_2>I_1>1$

D.$1>I_2>I_1$

三、计算题

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$

2.计算积分 $\int\dfrac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$

3.求定积分 $\int_1^4\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

4.设$\begin{cases}x=\int_1^{t^2}udu\\ y=\int_{t^2}^1 u^2\ln u du\end{cases}$ $t>1$, $B\dfrac{d^2y}{dx^2}$

5.求微分方程的通解：$xy'-3y=x^4e^x$

6.(学习高数I者做(1)，学习高数II者做(2))

(1)求微分方程组$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$的通解，其中A=$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$

(2).求$y''-4y'+4y=3e^{2x}$的通解

7.在抛物线$y=x^2(0\le x\le 8)$上求一点，使得过此点所作切线与直线x=8及x轴所围图形面积最大。

8.(学习高数 I者做(1)，学习高数 II者做(2))

（1）设广义积分$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$收敛，证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛

（2）计算$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$

9.设$f''(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$求$\varphi(x)$在x=1的某个邻域内的导数，并讨论$\varphi'(x)(x=1$处的连续性

2011年期末真题

一、填空题

1.$k=2$

解析: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x}{x}=2 \quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(3x^2-2x+k)=k \therefore k=2$

2.2 π

解析:令$x=2\sin\theta$

原式= $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\theta)2\cos\theta 2\cos\theta \mathrm{d}\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\pi$

3.$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$

解析:$\lambda^3+1=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4.$\dfrac{2x\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}$

二、选择题

1.B

解析:$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=-2 \therefore f'(5)=f'(5-4)=-2$

2.D

解析:$\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1$

3.D

解析:$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(\ln x)\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=\sin 1 \quad \lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\left[\ln(-x)\right]\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}-x(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x} \because \lim\limits_{x\to0}x\ln|x|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|x|}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0$

且$sin\dfrac{1}{x}$ 有界故上式极限为0 $\therefore:\pm1\mathrm{fi}0$

4.B

解析:设$f(x)=\tan x-x, x\in(0,\dfrac{\pi}{4}), f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x-1}>0 \therefore f(x)$单调增

$f(x)>f(0)=0 \therefore \tan -x>0\Rightarrow\tan x>x\Rightarrow\tan^2 x>x^2\Rightarrow\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x}, x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$

设$g(x)=\dfrac{\tan x}{x}, x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则$g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

令$h(x)=x-\sin x\cos x\mathrm{fi}\ss h'(x)=1-\cos 2x>0 \therefore h(x)U\Lambda, h(x)>h(0)=0$

$\therefore g'(x)>0\mathrm{fi}g'(x)U\Lambda \therefore g(x)<g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{4}{\pi}s\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{4}{\pi}$

故$\dfrac{4}{\pi}>\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x} \therefore 1>I_1>I_2$

三、计算题

1.原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\dfrac{1}{6}$

2.原式= $-\int\dfrac{x}{\cos^5 x}\mathrm{d}\cos x=\dfrac{1}{4}\int x\mathrm{d}\cos^{-4}x=\dfrac{x\cos^{-4}x}{4}-\dfrac{1}{4}\int\cos^{-4}x\mathrm{d}x=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{4}\left[\int\tan^2 x\mathrm{d}\tan x+\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right]$

$=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{12}\tan^3 x-\dfrac{1}{4}\tan x+C$

3.令$\sqrt{x}=t$，则原式$=\int_1^2 \frac{\ln t^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=4\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t=4\ (t\ln t-t)|_1^2=4(2\ln 2-1)$

4.$\dot{x}=t^2\cdot 2t=2t^3$，$\ddot{x}=bt^2,\dot{y}=-2t\cdot t^4\ln t^2=-4t^5\ln t,\ddot{y}=--4t^4(5\ln t+1),\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}=$
$\frac{2t^3\left[-4t^4(5\ln t+1)-6t^2(-4t^5\ln t)\right]}{(2t^3)^3}=-\frac{2\ln t+1}{t^2}$

5.先求$xy'-3y=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{3\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y=c_1x^3$ 令$y=h(x)x^3$
则$x\left[h'(x)x^3+3x^2h(x)\right]-3h(x)x^3=x^4e^x\Rightarrow h'(x)=e^x$　故$h(x)=e^x+c_2$　$\therefore y=(e^x+c)x^3$

6.(1) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(9-\lambda)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=9,\lambda_3=-1$

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A+E=\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$A-9E=\begin{bmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-t}+C_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}e^{9t}$

(2)$\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$　$\therefore$ æ:$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$
设特解为$y^*=Ax^2e^{2x}$ 代入得:$y^*=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$ 故$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$

7.$y'=2x$　$\Upsilon:y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$　切点:$(x_0$fi$x_0^2)$
$S=\int_{\frac{x_0}{2}}^{8}(2x_0x-x_0^2)\mathrm{d}x=\frac{x_0^3}{4}-8x_0^2+64x_0$　$S'=\frac{3x_0^2}{4}-16x_0+64=0\Rightarrow x_0=\frac{16}{x}$
当$0<x_0<\frac{16}{3}$时，$S'>0$;当$\frac{16}{3}<x_0<8$时，$S'<0$　$\therefore x_0=\frac{16}{3}$时S最大，对应点为$(\frac{16}{3},\frac{256}{9})$

8.(1)由柯西不等式:$|f(x)\cdot\frac{1}{x}|\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]\because\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$均收敛
$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]\mathrm{d}x$收敛 $\therefore\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x6[$　$E\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛

(2)原式$=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x^{-2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\arctan x}{x^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\arctan x\right]=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+$
$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ (-\frac{1}{x}-\arctan x)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$

9.$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow f(1)=0\therefore\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$
当$x\ne1$时，$\varphi(x)=\int_0^1 f'\ [1+(x-1)t]=\frac{f\ [1+(x-1)]}{x-1}\Big|_0^1=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}$
当$x=1$时，$\varphi(1)=\int_0^1 f'(1)\mathrm{d}t=0$　($x=1$的邻域内:$\varphi'(x)=\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}$
$\varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(1)}{2}$
$\because\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)+(x-1)f''(x-1)-f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(1)}{2}=$
$\varphi'(1)$
$\therefore\varphi'$(x)在$x=1$处连续

2010年期末真题

一、填空题

1.在抛物线$y=x^2$上与直线$x+2y=0$垂直的切线方程是:( )

2.若$y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+e^x$ 都是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解（其中$p(x), q(x), f(x)$都是已知的连续函数），则此方程的通解为:( )

3.设$f(x)I:(0,+\infty)$,已知 $f(1)=1, f'(x^2)=x^3$则 $f(4)$=:( )

二、选择题

1.设 $f(x)$在 $x=a$ 处取得极值且满足 $f''(x)+2f'(x)=\int_a^{x+1} e^{f(t)}dt$,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

A.必取极大值

B.必取极小值

C.不可能取极值

D.是否取极值不能确定

2.设$f(x)=2x\ln(1-x), g(x)=\sin^2 x,$ ßSx → 0时 $f(x)/g(x)$的 ( )

A.同阶但非等价无穷小

B.等价无穷小

C.高阶无穷小

D.低阶无穷小

三、解答题

1.设 $y=\arctan(\sqrt{x^2-1})-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{dy}{dx}$

2.设 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=e^{-t^2}(1+t^2) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

3.求不定积分 $\int e^x\ln(e^x+1)dx$

4.求微分方程$2xy'=y+2x^2$的通解

5.(学习高数I者做（1），学习高数II者做(2)）

（1）求微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$的通解，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

（2）求微分方程$y''+y'-2y=e^x$的通解

6.计算反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

7.抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0),(1,2)$ 两点，且 $a<0$,确定 a,b,c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小值，并求此图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

8.设函数$f(x)(:[a,b]\Omega$fi$(\Gamma:(a,b)$内可导，且 $f'(x)>0$,若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明在 (a,b) 内存在点 ξfi¨$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$

2010年期末真题

一、填空题

1.$y-1=2(x-1)$

解析:设切点$(x_0$fi$x_0^2)$,则$2x_0\cdot(-\frac{1}{2})=-1\Rightarrow x_0=1$　∴ 切线：$y-1=2(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

2.$y=C_1e^x+C_2x^2+3$

3.$\frac{19}{4}$

解析:令$t=x^2, f'(x^2)=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}\Rightarrow x^3=f'(t)\cdot 2x\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{2}\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+3}{4}$

$\therefore f(4)=\frac{19}{4}$

二、选择题

1.B

解析:$f'(a)=0$ 令$x=a$，则$f''(a)+2f'(a)=\int_a^{a+1}e^{f(t)}\mathrm{d}t>0\Rightarrow f''(a)>0\therefore x=a$处取极小值

2.A

解析:$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\ln(1-x)}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot(-x)}{x^2}=-2$

三、解答题

1.$y'=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}=\frac{x\ln x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$　$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x+1}{3x\sqrt{x^2-1}}=+\infty$

2.$\dot{x}=e^{-t^2}$　$\ddot{x}=-2te^{-t^2}$　$\dot{y}=\left[2t-2t(1+t^2)\right]e^{-t^2}=-2t^3e^{-t^2}$　$\ddot{y}=(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}$

$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$　则$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{e^{-t^2}\cdot(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}-(-2te^{-t^2})(-2t^3e^{-t^2})}{e^{-3t^2}}=\frac{-6t^2}{e^{-t^2}}\therefore\left.\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-6e$

3.原式$=\int\ln(e^x+1)de^x=(e^x+1)\left[\ln(e^x+1)-1\right]+C$

4.先求$2xy'=y\Rightarrow\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y=C_1\sqrt{x}$　设$y=h(x)\sqrt{x}$，则$2x\left[h'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}h(x)\right]=h(x)\sqrt{x}+2x^2\Rightarrow$

$h'(x)=\sqrt{x}\Rightarrow h(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$

$\therefore y=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)\sqrt{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\sqrt{x}$

5.(1) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　$r_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$A-E=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$　$r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$A-4E=\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$　$r_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}e^{t}+C_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}e^{4t}$

(2)$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1$　$\therefore$ 通解为$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

设特解为$y^*=Axe^{x}$　代入得:$y^*=\frac{1}{3}xe^{x}$　故$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{3}xe^{x}$

6.$I=\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^{+\infty}-\ln(e^{x}+1)|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln(e^{x}+1)\right]+\ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{x}-(e^{x}+1)\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}+\ln 2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)e^{x}-[e^{x}+e^{x}\ln(e^{x}+1)]}{e^{x}}+\ln 2=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln(e^{x}+1)+\ln 2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{x}}{e^{x}+1}+\ln 2=\ln 2$

7.$\begin{cases}0=c\\2=a+b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\c=0\end{cases}$　$y=ax^2+bx=x(ax+b)\Rightarrow x_1=-\frac{b}{a},x_2=0$

$\because a<0,b=2-a>0$　$\therefore x_1>0$

$S=\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\Big|_0^{-\frac{b}{a}}=-\frac{b^3}{3a^2}+\frac{b^3}{2a^2}=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{(2-a)^3}{6a^2}$

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}=\frac{-3(2-a)^2a^2-2a(2-a)^3}{6a^4}=\frac{-(2-a)^2(a+4)a}{6a^4}=0\Rightarrow a=-4$

$\therefore a=-4,b=-6,c=0$　$y=x(-4x+6)$　$\dot{V}=\int_0^{\frac{9}{4}}\pi\frac{6\sqrt{36-4\cdot(-4)\cdot(-y)}}{(-4)^2}\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{4}\int_0^{\frac{9}{4}}\sqrt{9-4y}\mathrm{d}y=\frac{27\pi}{8}$

8.$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在$f(a)=0$ $\because f'(x)>0$ $\therefore f(x)\geq f(a)=0$ 设$g(x)=x^2$

$h(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$由柯西中值定理:$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$　$\xi\in(a,b)$

即$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\mathrm{d}t}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$