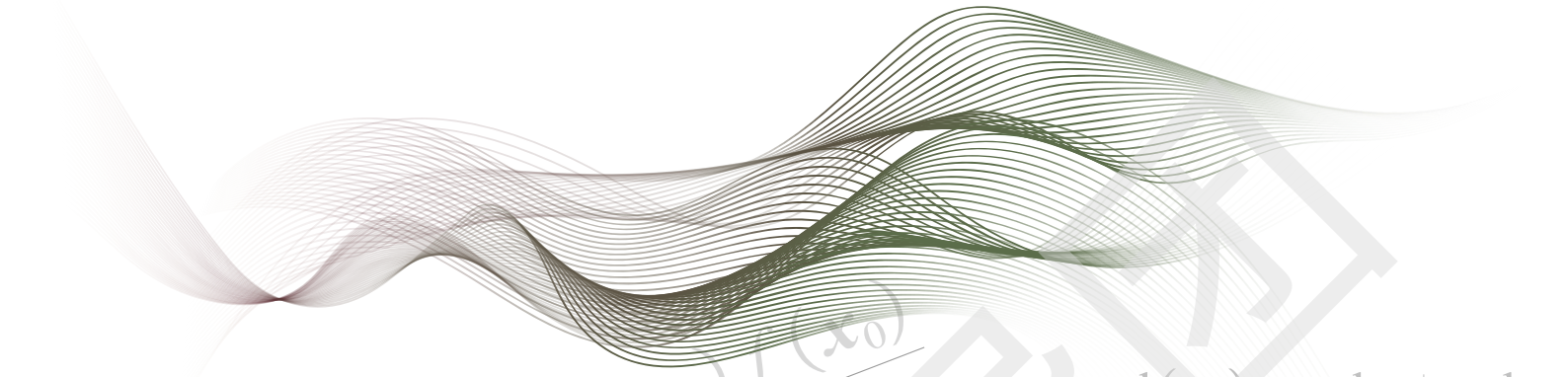


高等数学(下)
期中真题集

彭康书院学业辅导与发展中心 · 资料编写组

目录

2024 年高数下期中试题 第 1 页

2024 年高数下期中试题解析 第 3 页

2023 年高数下期中试题 第 11 页

2022 年高数下期中试题 第 17 页

2021 年高数下期中试题 第 22 页

2020 年高数下期中试题 第 26 页

2019 年高数下期中试题 第 30 页

2018 年高数下期中试题 第 34 页

2017 年高数下期中试题 第 37 页

2016 年高数下期中试题 第 40 页

2015 年高数下期中试题 第 44 页

2023 年高数下期中试题解析 第 47 页

2022 年高数下期中试题解析 第 53 页

2021 年高数下期中试题解析 第 61 页

2020 年高数下期中试题解析 第 64 页

2019 年高数下期中试题解析 第 70 页

2018 年高数下期中试题解析 第 73 页

2017 年高数下期中试题解析 第 77 页

2016 年高数下期中试题解析 第 79 页

2015 年高数下期中试题解析 第 81 页

2023-2024 学年第二学期期中考试试卷

一、单选题

1. 下列命题中正确的是（　　）.

   (A) $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 等价

   (B) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 必连续

   (C) $f(x,y)$ 在 P_0 点沿任意方向的方向导数存在，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$ 都存在

   (D) $f(x,y)$ 在 P_0 点沿任何方向 $\vec{u}$ 的方向导数存在，则 $f(x,y)$ 在 P_0 点必连续.

2. 函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且 $g(0,0)=0$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（　　）.

   (A) 连续但偏导数不存在　　(B) 不连续但偏导数存在

   (C) 可微　　(D) 偏导数存在但不可微

3. 设函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 具有二阶连续导数，则函数 $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$ 满足（　　）.

   (A) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$　　(B) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

   (C) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$　　(D) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

4. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1$，则（　　）.

   (A) $f_x(0,0)$ 不存在　　(B) $f_x(0,0)$ 存在，但不为零

   (C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

5. 设曲面 $z=\dfrac{1}{2}x^2+y^2$ 上有一点 M，曲面在该点的切平面平行于平面 $2x+2y-z=1$，则 M 点的坐标为（　　）.

   (A) $(2,1,3)$　　(B) $(1,2,3)$　　(C) $(3,2,1)$　　(D) $(1,3,2)$

6. 设区域 $D:\{(x,y)|-1\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，$D_1:\{(x,y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (xy+x^2\arctan y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（　　）.

   (A) $2\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1} x^2\arctan y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   (C) $4\iint\limits_{D_1} (xy+x^2\arctan y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(D) 0

彭康学导因

二、填空题

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\tan\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{xy}{3}}=$ _____.

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{3x+4y}{1+xy^2\mathrm{e}^{xy}}$，则 $f_x(0,0)=$ _____，$f_y(0,0)=$ _____.

3. 交换积分顺序：$\displaystyle\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ _____.

4. 函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $M(-0.5,-0.5,0)$ 处的梯度为 _____，在该点沿 $\vec{l}=\{1,-1,0\}$ 的方向导数为 _____.

5. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=\varphi(y-bz)$ 所确定，其中 $\varphi(u)$ 有连续导数，a,b 为不全为零的常数，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____.

6. (D) 是直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域，则 $\displaystyle\iint\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ _____.

三、计算题

1. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}$.

2. 求曲线 $\vec{r}(t)=\{t,-t^2,3t-1\}$ 上一点处与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

3. 设向量值函数 $\vec{w}=\vec{f}(\vec{u})=\begin{pmatrix}u_1+u_2\\ u_2u_3\end{pmatrix}$，$\vec{u}=g(\vec{x})=\begin{pmatrix}x_1\mathrm{e}^{x_2}\\ \mathrm{e}^{x_1}+\sin x_2\\ x_1-x_2\end{pmatrix}$，$\vec{x}=(x_1,x_2)^T$，则 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$，$\vec{w}=(w_1,w_2)^T$ 求复合函数 $(f\circ g)$ 在 $(1,0)$ 点处的导数及微分.

4. 已知方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=uv\\ xy^2=u^2-v^2\end{cases}$ 确定了隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

5. 求函数 $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值.

四、设 $f(x,y)=\begin{cases}xy^2\sin\dfrac{1}{x+y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数的存在性及可微性.

五、求曲面 $xy-z^2+1=0$ 上距离原点最近的点.

六、已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x^2,f(0,y)=y$，求 $f(x,y)$.

七、设 $f\in C^{(1)}[\varepsilon,+\infty),\varepsilon>0$ 且 $f'(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le t^2}\dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

2023-2024 学年第二学期期中考试试卷解析

一、单选题

1. C

解析.

A 选项，

累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$：先固定 x，求 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的极限（得到一个关于 x 的函数），再求 $x\to x_0$ 时这个函数的极限。它是分两步，按先后顺序对 y 和 x 分别求极限

二重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$：它表示点 (x,y) 以任意方式趋近于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 的极限。要求点 (x,y) 从各个方向，各种路径趋近于 (x_0,y_0) 时，函数值都趋近于同一个常数

B 选项，多元函数在某一点偏导数存在无法推出在该点连续，它们之间没有必然的包含关系

C 选项，任意方向包含 x 方向和 y 方向，正确

D 选项，沿任意方向 $\vec{u}$ 的方向导数存在，无法推出连续 □

2. C

解析.

连续性：由于 $g(x,y)$在点$(0,0)$ 处连续，故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=|x-y|g(x,y)=0=f(0,0)$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处连续

偏导数存在:

$$\begin{aligned} f_x&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x}=0 \end{aligned}$$

同理得 $f_y=0$，故偏导数存在

可微性：根据可微性定义，有

$$\Delta f=f_x\Delta x+f_y\Delta y+o(\rho)=o(\rho)\qquad \Delta f=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x-y|g(x,y)$$

若可微，应有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(\rho)}{\rho}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由 $0\le\frac{|x-y|g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\le g(x,y)$，结合夹逼定理，可知上式成立，故可微 □

3. D

解析. 求导，得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)$ 故，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

□

4. D

解析. 由 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1$ 知，在点（0，0）附近 $f(x,y)=-\sin(x^2+y^2)$

$$\text{故 } f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x^2)}{x}=0 \text{ 存在}$$

因为 $\sin(x^2+y^2)$ 在 (0,0) 附近大于 0，所以 $f(x,y)$ 在 (0,0) 附近小于 0

又 $f(0,0)=0$，可知，点 (0,0) 是 $f(x,y)$ 的极大值点 □

5. A

解析. 曲面 $z=\frac{1}{2}x^2+y^2$ 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面方程为

$$F(x,y,z)=0 \qquad F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

平行于平面 $2x+2y-z=1$，即

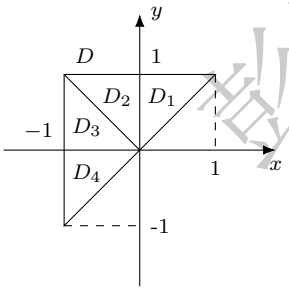
$$\frac{F_{x_0}}{2}=\frac{F_{y_0}}{2}=\frac{F_{z_0}}{-1}$$

解得，$M(2,1,3)$ □

6. B

解析.

将 D 区域划分为 D_1 D_2 D_3 D_4 四部分，即下图



所求 $\iint_D(xy+x^2\arctan y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D x^2\arctan y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

第一项关于 x y 均为奇函数，故有

$$\iint_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \qquad \iint_{D_3}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_4}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

此即，

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

第二项关于 x 是偶函数，关于 y 是奇函数，故有

$$\iint_{D_1} x^2 \arctan y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_2} x^2 \arctan y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_3} x^2 \arctan y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_4} x^2 \arctan y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

此即，

$$\iint_{D} \left(xy + x^2 \arctan y\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} x^2 \arctan y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□

二、填空题

1. $e^{\frac{1}{3}}$

解析. 设 $t = xy$，则所求转化为

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{3}\ln\left(1+\tan\frac{1}{t}\right)}$$

因为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{3}\ln\left(1+\tan\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{3}\tan\frac{1}{t} = \frac{1}{3}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

□

2. $3;4$

解析.

$$f(x,0) = 3x, f(0,y) = 4y$$

故

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{3x}{x} = 3$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{4y}{y} = 4$$

□

3. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

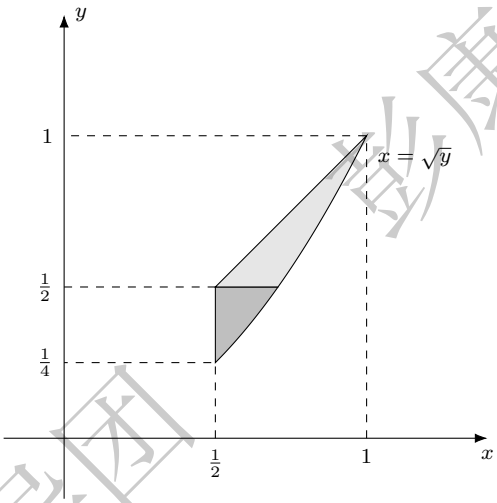
解析.

由 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

可知

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{y}\\ \frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}\end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} y\le x\le\sqrt{y}\\ \frac{1}{2}\le y\le 1\end{cases}$$

由此画出积分区域，



故可得，当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时，$x^2 \leq y \leq x$

所以原式$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ □

4. $(-1,-1,0);0$

解析.

函数 u 梯度向量是 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$，即(2 x, 2 y, 2 z)

故 u 在 M 处的梯度为 $(-1,-1,0)$

则 u 沿 l 方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial L} &= 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2y \times \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

5. 1

解析.

令 $F(x,y,z) = x - az - \varphi(y - bz)$.

则 $F_x = 1, F_y = -\varphi'(u), F_z = b\varphi'(u) - a$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-1}{b\varphi'(u) - a}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\varphi'(u)}{b\varphi'(u) - a}.\end{aligned}$$

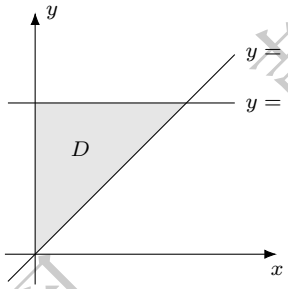
故 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-a}{b\varphi'(u) - a} + \frac{b\varphi'(u)}{b\varphi'(u) - a} = 1$

□

6. $\frac{2}{9}$

解析.

画出积分区域，



先 x 后 y 积分较容易，所以

$$\iint_D \sqrt{y^2-xy}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^y \sqrt{y^2-xy}dx = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}\left(y^2-xy\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y dy$$
$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 \left(0-\frac{1}{y}y^3\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}$$

□

三、计算题

1. $\frac{2}{r}$

解析.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

同理，

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

则原式 $= \frac{2}{r}$。 □

2. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$

解析.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \{1,-2t,3\} \quad 应有 \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\cdot(1,2,1) = 0 \quad 得到 \quad t = 1.$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}.$$

□

3. 见解析

解析. 先写出 $\vec{w}$ 关于 x_1 x_2 的表达式

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ u_2u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1e^{x_2}+e^{x_2}+\sin x_2 \\ (e^{x_1}+\sin x_2)(x_1-x_2) \end{pmatrix}$$

导数，

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+e & 2\\ 2e & 1-e\end{bmatrix}$$

微分，

$$\begin{aligned}d(f\circ g)&=\begin{bmatrix}(e^{x_1}+e^{x_2})dx_1+(\cos x_2+x_1e^{x_1})dx_2\\ (e^{x_1}+\sin x_2+x_1e^{x_1}-x_1e^{x_1})dx_1+(-e^{x_1}-\sin x_2+x_1\cos x_2-x_2\cos x_2)dx_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1+e & 2\\ 2e & 1-e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xv+\frac{1}{2}y^2u}{u^2+v^2}$，　$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2yv+xyv}{u^2+v^2}$

解析.

$$\begin{cases}2xdx+2ydy=udv+vdu\\ y^2dx+2xydy=2udu-2vdv\end{cases}\Rightarrow du=\frac{(2xv+\frac{1}{2}y^2u)dx+(2yv+xyv)dy}{u^2+v^2}$$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xv+\frac{1}{2}y^2u}{u^2+v^2}$，　$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2yv+xyv}{u^2+v^2}$。 □

5. 极小值：-1

解析.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0\quad\Rightarrow\quad x=1\quad y=0.$$

而 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)}=2,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,0)}=-1,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,0)}=2.$

有 $B^2-AC=-3<0, A>0$，故 $(1,0)$ 为 z 的极小值点，极小值为-1 □

四、 连续、偏导数存在、可微

解析. 连续性：

$$(x,y)=(0,0)\quad 时\quad f(x,y)=0.$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，

$$\Rightarrow|f(x,y)|=|xy^2\sin\frac{1}{x+y}|\leq|xy^2|\leq\sqrt{x^2+y^2}^3<\delta^3.$$

则可取 $\varepsilon=\delta^3$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

可导性：

$$f(x,0)=0\ f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f(0,y)=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在.

可微性:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\sin\frac{1}{x+y} - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0\,0)} \frac{xy^2\sin\frac{1}{x+y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得} 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \left|\frac{xy^2\sin\frac{1}{x+y}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |y|^2 \le \delta^2, \text{令} \varepsilon = \delta^2 \text{即可}.$$

则上述极限为 0，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。 □

五、 $(0,0,1)$ 和 $(0,0,-1)$

解析. 即求 $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最小值, 或 $f^2 = x^2+y^2+z^2$ 的最小值。

令 $h = x^2+y^2+z^2-\lambda(xy-z^2+1)$

$$\begin{cases} h_x = 2x-\lambda y = 0 \\ h_y = 2y-\lambda x = 0 \\ h_z = 2z+2\lambda z = 0 \\ \lambda = xy-z^2+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\pm 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \\ \lambda=-2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

故曲面 $xy-z^2+1=0$ 到原点的最小距离为 1. □

六、 $f(x,y) = \frac{1}{2}xy(x+y)+x^2+y^2$

解析.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int \frac{\partial f}{\partial x\partial y}dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi_0(x)$$

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

代入 $f(x,0) = x^2 \Rightarrow \varphi_1(x) = x^2, \quad f(0,y) = y^2 \Rightarrow \varphi_2(y) = y^2$

则 $f(x,y) = \frac{1}{2}xy(x+y)+x^2+y^2$. □

七、 $f(t) = C(\mathrm{e}^{t-\varepsilon} + \mathrm{e}^{\varepsilon-t})$

解析.

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^t \frac{f(t)}{t}\cdot t\,dt = \int_\varepsilon^t f(t)\,dt$$

$$f''(t) = f(t) \quad \text{即} \quad f''-f=0, \text{特征值为} \pm 1.$$

则 $f(t) = Ae^{-t}+Be^t \Rightarrow f'(t) = -Ae^{-t}+Be^t$

又有 $f'(t)=\int_{\varepsilon}^{t} f(t)\,dt = B(e^{t}-e^{\varepsilon})-A(e^{-t}-e^{-\varepsilon})$

结合上面的 $f'(t)$，联立可得 $A\mathrm{e}^{\varepsilon}=B\mathrm{e}^{-\varepsilon}$，对于任意 ε 均成立，可解得，

$$A=Ce^{\varepsilon}\quad B=C\mathrm{e}^{-\varepsilon}$$

故 $f(t)=C(\mathrm{e}^{t-\varepsilon}+\mathrm{e}^{\varepsilon-t})$ □

彭康学导因

2023高数下期中试题

一、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续, 则 (　　).

(A) $f(x_0,y_0)$ 必不存在

(B) $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 必不存在

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必不存在

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必不可微

2. 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则下列结论中不一定成立的是(　　).

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二重极限存在;

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在;

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数连续;

3. 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则(　　).

(A) $f_x(0,0)$ 存在, $f_y(0,0)$ 不存在;

(B) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都不存在;

(C) $f_x(0,0)$ 不存在, $f_y(0,0)$ 存在;

(D) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在;

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$, 则 ( ).

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$;

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{3,1,1\}$;

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{1,0,3\}$;

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{3,0,1\}$;

5. 设圆域 $D:x^2+y^2<R^2$ 在第一象限的部分为 D_1, 则 $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\quad)$.

(A) $4\iint_{D_1}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(B) 0;

(C) $16\iint_{D_1}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(D) $4\iint_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x+y}=$
2. 改变二次积分的积分次序: $\int_0^1\,\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$
3. 函数 $f(x,y)=x^2y^3$ 在点 $(2,1)$ 处梯度为 ，沿 $\vec{i}+\vec{j}$ 的方向导数为
4. 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数, 则 $f_x(1,1,1)=$
5. 设 $F(t)=\iint_D e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $x^2+y^2\le t^2$, 则 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{F'(t)}{t}=$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 已知函数 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f,g 具有二阶连续导数, 求 $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ 的值.

2. 求曲线 $\begin{cases}x^2+z^2=10\\y^2+z^2=10\end{cases}$. 在点 $(1,1,3)$ 处的切线和法平面方程.

3. 已知向量值函数 $\vec{w}=\vec{f}(\vec{u})=\begin{pmatrix}u_1\cos u_2\\ u_1u_3\end{pmatrix}, \vec{u}=\vec{g}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\sin x_2\\ lnx_1-\cos x_2\\ x_1^3x_2\end{pmatrix}$, 其中 $\vec{x}=(x_1,x_2)^T, \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)^T, \vec{w}=(w_1,w_2)^T$, 求复合函数 $(f\circ g)$ 在 $(1,0)$ 点处的导数及微分.

4. 已知方程组 $\begin{cases}u^3+xv=y\\ v^3+yu=x\end{cases}$ 确定了隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

5. 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且满足 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定常数 a,b 的值, 使上述等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

四、(12 分)

设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数和可微性.

五、(8 分)

在椭球面 $4x^2+y^2+z^2=4$ 的第一卦限部分上求一点, 使得过此点的切平面与三个坐标面围成的三棱雉的体积最小.

六、(8 分)

若函数 $z=z(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 证明 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ 成立的充要条件是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

七、(7 分)

设 $f(x,y)$ 为连续函数, 且 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+y\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$,

其中区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 求:

(1) $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$;

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

图防资源

2022年高等数学下期中试题

一、选择题（共5题，每题3分）

1. 设$f(x,y)$在$(0,0)$的一个邻域内有定义，那么$f(x,y)$在$(0,0)$处可微的一个充分条件是 （ ）

A. $f(x,y)$在$(0,0)$处连续且$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$均存在

B. $f(x,y)$在$(0,0)$处沿任意方向的方向导数均存在

C. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

2. 设V由曲面$x^2+y^2=z^2+9$与平面$z=0,z=4$围成，则在柱坐标下$\iiint\limits_V f\left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}V$可以化为 （ ）

A. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z$

B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{\rho^2-9}}^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z$

C. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_3^5\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2-9}^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z$

D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_3^5\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{\rho^2-9}}^4 f\left(\rho^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x-\sin(2y)}{x-2y}$的极限为 （ ）

A. 0　　B. 1　　C. 不存在但非∞　　D. ∞

4. 设$f(x,y)$满足$f_{yy}(x,y)=2,f(x,0)=1.f_y(x,0)=x$，那么$f(x,y)=$ （ ）

A. $1-xy+y^2$　　B. $1+xy+y^2$　　C. $1-x^2y+y^2$　　D. $1+x^2y+y^2$

5. 设$\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le\pi,0\le y\le\sin x\}$，那么$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=$ （ ）

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

二、填空题（共5题，每题3分）

1. 函数$f(x,y,z)=x+y+z$在点$P(0,0,1)$处沿着球面$x^2+y^2+z^2=1$的外法线方向的方向导数为_____.

2. 设$f(x,y)=xe^{x+y}+\ln y\cdot\arctan\dfrac{x+y}{1+x^2y^2}$，则$f_x(1,1)=$_____.

3. 设$x^z+y=z^y+x^2$决定的隐函数$z=z(x,y)$，则$\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$_____.

4. 交换积分次序$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=$_____.

5. 设$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\le 1\}$，那么$\displaystyle\iiint_V\left(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z\right)^2\mathrm{d}V=$_____.

三、计算题（共7题，每题8分）

1. 设f具有连续的二阶偏导数,$z=f(2x-y,y\sin x)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$与$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设有隐函数方程$\begin{cases}x=-u^2+v+z\\ y=u+vz\end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial z}$与$\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

内部资料 请勿传播

3. 求曲面$x^2+x+\cos(xy)+yz=0$上点$P(0,1,-1)$处的切平面与法线方程.

4. 设$(\sigma)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$，计算$\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\max(x^2,y^2)}\,\mathrm{d}\sigma$.

5. 设V是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$围成的立体，计算

$$I=\iiint_V (x+y+z)^2\,\mathrm{d}V.$$

6. 求$f(x,y)=x^3+y^3+(x+y)^2$的极值。

7. 已知$\boldsymbol{f}(u,v)=\begin{pmatrix}u^2+v^2\\ uv\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\cos x+\sin y+\tan z\\ \exp(x+y+z)\end{pmatrix}$，设$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(x,y,z)=\boldsymbol{f}\circ$

图 数学 论

$\boldsymbol{g}$,求$D\boldsymbol{w}(0,0,0)$.

四、设$f(x,y)=x^{2022}+y^{2022}$

1. 求$f(x,y)$在条件$x^2+y^2=1$下的最大值与最小值。
2. 设$\mathbf{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 1\}$，如果非负函数$g(x,y)$在区域$\mathbf{D}$上有连续的偏导数，且在边界$x^2+y^2=1$上满足$g(x,y)=f(x,y)$，证明：存在$(\xi,\eta)\in\mathbf{D}$，使得

$$g_x(\xi,\eta)^2+g_y(\xi,\eta)^2<4$$

图哈哈数学

2021 年高数下期中试题

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{sin(x^2y)}{x^2+y^2} =$_____.

2. 函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-2,y)$确定，其中函数$f(u,v)$可微，则$dz|_{(0,1)}=$____.

3. $u=2xy-z^2$在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值为_____.

4. 设$z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(x,y)$，且$\varphi$为可微函数，则$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=$_____.

5. 设区域$(D)=\left\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_{(D)}(x+y+1)\,d\sigma=$_____.

二、计算题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 设$z=f\left(x^2y,\frac{y}{x}\right)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的隐函数，求$z=z(x,y)$的极值.

3. 已知方程组$\begin{cases}xu+yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}$确定了隐函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial v}{\partial y}$.

4. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\y^2+z^2=R^2\end{cases}$在点$P\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$处的切线和法平面方程.

5. 已知曲线$\begin{cases}y=2x\\z=x^2+y^2-4\end{cases}$在点$(1,2,1)$处的切向量$\vec{a}$与$z$轴正向的夹角为锐角，求函数$f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$(1,2,1)$处沿向量$\vec{a}$的方向导数.

6. 计算积分$I=\iint\limits_{(D)}|x^2+y^2-1|\,dx\,dy$，其中$(D)=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$.

7. 计算$\int_0^1 dy\int_y^1 x\sin\frac{y}{x}dx$.

8. 求曲面$x^2+y^2=az$与曲面$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$围成的立体体积.

9. 计算$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dV$，其中$(V)=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-1)^2}{c^2}\leq 1\right\}$

10. 已知向量值函数

$$\vec{w}=\vec{f}(\vec{u})=\begin{pmatrix}u_1u_2u_3\\ u_2\sin u_1\end{pmatrix},\vec{u}=\vec{g}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\ln x_1\cdot\cos x_2\\ x_2+\sin x_1\\ x_1^2e^{x_2}\end{pmatrix}$$

求复合函数$(f\circ g)$在$(0,1)$点处的导数.

三、（本题 9 分）

讨论$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$处的连续性和可微性.

四、（本题 8 分）

求抛物面$z=1+x^2+y^2$的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面$(x-1)^2+y^2=1$围成的立体体积最小，写出切平面方程并求出最小体积.

五、（本题 8 分）

若$\forall t>0$，有$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则函数$f(x,y)$称为n次齐次函数.

证明：若$f(x,y)$可微，则$f(x,y)$是n次齐次函数的充要条件是$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

2020 年高数下期中试题

一、填空题

1. 设 $z=\mathrm{e}^{x^2y}$，则 $\mathrm{d}z=$ _____ .

2. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy=\mathrm{e}^{xz}-z$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ _____ .

3. $u=2xy-z^2$ 在点 $(2,-1,1)$ 处方向导数的最大值为 _____ .

4. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2+z^2=10\end{cases}$ 在点 $M(3,1,1)$ 处的切线方程为 _____ .

5. 设平面曲线 L 为 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$ _____ .

二、计算下列各题

1. 设 $z=f\left(\mathrm{e}^{x+y},\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2.求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 的一个切平面，使该切平面在三个坐标轴上的截距之积最大，并写出该切平面方程.

团 彭康学导

3. 方程组 $f(x,y)=\begin{cases} u+v+w=x \\ uv+vw+wu=y \\ uvw=z \end{cases}$ 可确定隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y,z) \\ v=v(x,y,z) \\ w=w(x,y,z) \end{cases}$，求偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

4.计算二重积分 $I=\iint\limits_{(D)}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 (D) 是由 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax, x=0$ 围成的第一象限的区域.

5. 计算 $I=\iint\limits_{(\Sigma)}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 (Σ) 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

三、计算三重积分 $I=\iiint\limits_{(\Omega)} z\mathrm{d}v$，其中 (Ω) 由曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

四、计算曲线积分 $\int_L\left(x^2y+3x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(x^3-y\sin y\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是摆线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,2)$ 的弧段.

五、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$，其中 (Σ) 为椭圆抛物面 $z=4-\left(x^2+4y^2\right)(z\geq 0)$ 的上侧.

六、设(Ω)为空间有界区域, 其边界$(\partial\Omega)$逐片光滑, $\vec{n}$是$(\partial\Omega)$的外单位法向量, 函数$f(x,y,z)$在(Ω)内满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, 在$(\partial\Omega)$上有连续的偏导数. 证明:

(1) $\oiint\limits_{(\partial\Omega)}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=0$;

(2) $\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{(\Omega)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V$;

(3) 若当$(x,y,z)\in(\partial\Omega)$时, $f(x,y,z)\equiv 0$, 证明: 在(Ω)内, $f(x,y,z)\equiv 0$.

彭康学导团

2019 年高数下期中试题

一、单选题

1. 设函数$f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$，其中 α>0 为常数，则$f(x,y)$在$(0,0)$处(　　)

A. 连续但不可偏导　　B. 可偏导但不连续

C. 可微且$df|_{(0,0)}=0$　　D. $f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在$(0,0)$点连续

2. 已知D为顶点坐标为$A(1,1)$，$B(-1,1)$和$C(-1,-1)$的三角形区域，D_1为D的第一象限部分，则$\iint_D(xy+\cos x\sin y)\,dx\,dy$等于(　　)

A. $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,d\sigma$　　B. $2\iint_{D_1}xy\,d\sigma$

C. $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,d\sigma$　　D. 0

3. 设有直线 L：$\begin{cases}x-y-4z+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$ 和曲面$z=x^2-y^2+z^2$ 在点(1,1,1)处的切平面为π，则直线 L 和平面 π 的位置关系为 (　　)

A. $L\subset\pi$　　B. $L/\!/\pi$

C. $L\perp\pi$　　D. L 与 π 斜交

4. 设空间曲线函数 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2=2\\x+y+z=1\end{cases}$ 在点 P(-1,1,1)处的切线的方向向量为$\vec{a}$，则函数$u=x^2+2y^2-3z^2$ 在点 M(2,-1,-1) 处沿方向$\vec{a}$的方向导数$\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{a}}\right|_M$为(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$

C.12 或-12　　D. $2\sqrt{6}$或$-2\sqrt{6}$

5. 设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，若$f(x,x^2)=x^3$，$f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则$f_y(x,x^2)$等于(　　)

A. $x+x^3$　　B. $2x^2+2x^4$

C. x^2+x^5　　D. $2x+2x^2$

二、填空题

1. 设函数$u=e^{-\pi z}\cos\frac{x}{y}$在点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\pi},0\right)$处的全微分为d$u$= ＿＿＿＿＿＿

2. $u=z^2-2xy+y^2$在点$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$处的方向导数的最小值为_____.

3. 交换二次积分的次序（其中$f(x,y)$连续），$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy=$_____.

4. 使二重积分$\iint_D(4-4x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$达到最大的平面区域 D 为_____.

5. 设$z=f\left(x^2-y^2,\varphi(x,y)\right)$，其中$f$，$\varphi$可微，则$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$=_____.

三、计算下列各题

1. 设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})+\frac{y}{g(x^2+y^2)}$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设$\vec{r}=\vec{r}(t)$为空间R^3中动点$\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T$的向径.证明：$\|\vec{r}(t)\|=C\Leftrightarrow$内积$\langle\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\rangle=0$.（$C$为常数）

四、计算下列各题

1. 计算二重积分$I=\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$. 其中 D 是由圆周$x^2+y^2=4$及坐标轴所围成的第一象限内的闭区域。

2. 设函数$f(x)$连续，平面有界闭区域 D 由$|y|\le|x|\le 1$确定.证明：

$$\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=\pi\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)\,dx.$$

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数$u(x,y,z)=f(r)$，其中$f(r)$具有二阶连续导数。

（1）把$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成关于 r 的函数

（2）若 u 满足$\Delta u=0$，求$f(r)$

五、求函数$f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$在闭区域$x^2+2y^2\leq 3$上的最值。

六、设函数$f(t)$在$(0,+\infty)$上连续且满足方程$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$，求$f(t)$.

七、设$F(x,y)$可以表示为$F(x,y)=f(x)g(y)=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$其中$f$，$g$，$\varphi$都是连续函数。证明：$F(x,y)=C_2e^{C_1(x^2+y^2)}$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数.

2018 年高数下期中试题

一、单选题

1. 曲面 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 上点 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ 处法线与 z 轴夹角的正弦值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$　　B. $\frac{3\sqrt{26}}{26}$　　C. $\frac{\sqrt{65}}{13}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{26}}$

2. 设 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=$（其中 $D:x^2+y^2\le r$）（　　）

A. π　　B. $\frac{1}{\pi}$　　C. 1　　D. -1

3. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

4. 设 $f(x,y)=e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在 $(0,1)$ 点处的两个偏导数 $f_x(0,1)$，$f_y(0,1)$ 的情况为（　　）

A. $f_x(0,1)$ 不存在，$f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$　　B. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$，$f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$

C. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$，$f_y(0,1)$ 不存在　　D. 两个偏导数均不存在

5. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（　　）

A. 只有一条　　B. 只有两条

C. 至少有 3 条　　D. 不存在

二、填空题

1. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $grad\,u|_M=$_____.

2. 设 $f(x,y)=\arctan\sqrt{x^y}$，则 $f_x(x,1)=$_____.

3. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$_____.

4. 设 $u=2yz-z^2$，则 u 在 $(2,-1,1)$ 处导数的最大值为_____.

5. 设有椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$，则它在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 处切平面方程为_____.

三、解答题

1. 设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算二重积分 $I=\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$，$x=0$ 所所围在第一象限的区域 $(a>0)$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，问在原点 $(0,0)$ 处：偏导数是否存在？偏导数是否连续？函数是否可微？

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2-3z=0$ 与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

5. 已知平面两定点 $A(1,3), B(4,2)$，试在方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 的椭圆上求一点 C，使得 ΔABC 的面积最大化?

6. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，求 $f(t)$.

2017 年高数下期中试题

一、单选题

1. 二元函数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_x(x_0,y_0)$ 存在对于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

2. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分别为 $f_x(1,-2)=1$ 和 $f_y(1,-2)=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　　）

A. $\vec{i}$　　B. $\vec{j}$　　C. $\vec{i}-\vec{j}$　　D. $\vec{i}+\vec{j}$

3. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 连续但偏导数不存在　　B. 不连续但偏导数存在

C. 可微　　D. 连续且偏导数存在

4. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$ 等于（　　）

A. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　B. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

C. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　D. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，$f(x)$ 为正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$ 等于（　　）

A. $ab\pi$　　B. $\frac{ab\pi}{2}$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\frac{(a+b)\pi}{2}$

二、填空题

1. 若函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数，则 $dz|_{(1,0,-1)}=$ _____.

2. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $gradu|_{(1,2,-2)}=$ _____.

3. 若 $f \in C[0,1], \int_0^1 f(x)dx = A$，则 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy =$ _____.

4. $\lim\limits_{c \to 0} \iint\limits_{c \le x^2+y^2 \le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy =$ _____.

5. 若函数 $z = f(x,y)$ 是由方程 $F(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ 确定的隐函数，且 $F(u,v)$ 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

三、计算题

1. 求曲线 $x = \cos(t), y = \sin(t), z = \tan(\frac{t}{2})$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程额法平面方程.

2. 求曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

3. 设 $z = x^2 f(x, \frac{y^2}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4. 计算二次积分 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le ax\}(a>0)$.

6. 在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{2}$ 上找一点 (x_0,y_0,z_0)，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点 $A(0,0,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值.

7. 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性和 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

2016 年高数下期中试题

一、单选题

1. 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y(x,x^2)=$（　　）

A. $x+x^3$　　B. $2x^2+2x^4$　　C. x^2+x^5　　D. $2x+2x^2$

2. $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$，交换积分次序得(其中 f 连续)(　　)

A. $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　B. $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

C. $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　D. $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

3. 设函数 $z^2=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$ 则（　　）

A. $dy\big|_{(0,0)}=3dx+dy$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,0)$

C. 曲线 $z=\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲面 $z=\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,1,0)$

4. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 2 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　)

A. 无定义　　B. 连续　　C. 有极限但不连续　　D. 无极限

二、填空题

1. 曲面 $\sin xy+\sin yz+\sin xz=1$ 在点 $(1,\dfrac{\pi}{2},0)$ 处的切平面方程为 _____.

2. 设函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu\big|_M=$ _____.

3. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$，在点 $(1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$ 的方向导数是 _____.

4. 设 $f(x,y)\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=$_____.

5. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=$_____.

三、计算题

1. 设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算 $I=\iint\limits_{(D)}(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 (D) 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 及 $x=0$ 所围在第一象限的区域.

3. 在曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上求一个切平面，使该切平面在三个坐标轴是的截距之积为最大，并写出该平面的方程.

4. 设 $z=\arcsin\sqrt{x^2-y}$，求全微分 dz.

5. 求球面$x^2+y^2+z^2-3x=0$与平面$2x-3y+5z-4=0$的交线在点$(1,1,1)$处的切线与法平面方程.

6. 设$z=z(x,y)$由$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$所确定，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、综合题

1. 对任意的x和y，有$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，且变量代换$\begin{cases}x=uv\\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$，将函数$f(x,y)$变换成$g(u,v)$，试求满足关系式$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$的常数$a$，$b$.

2. 试证明：三曲面 $F_i(x,y,z)=0(i=1,2,3)$ 切同一直线 L 于点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的充分必要条件是

$\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}=0$.

3. 设函数 $f(t)\in C[0,+\infty)$ 且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，求 $f(t)$.

2015 年高数下期中试题

一、单选题

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 极限存在　　B. 连续　　C. 可微　　D. 关于 x，y 的偏导数存在

2. 函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2-2xz+2y-3$ 在点函数 $(1,-1,2)$ 处方向导数的最大值为（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 设曲面 $z^2-xy=8(z>0)$ 上某点的切平面平行于 $x-y+2z-1=0$，则该点的坐标为（　　）

A. $(-2,2,2)$　　B. $(1,-4,2)$　　C. $(2,-2,2)$　　D. $(4,-1,2)$

4. 设 $f(u)$ 为连续函数，$F(t)=\iint\limits_{(D)} f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 $(D):0\le y\le\sqrt{t^2-x^2}$，则 $F'(t)$ 为（　　）

A. $\pi t^2 f(t)$　　B. $2\pi t^2 f(t)$　　C. $\pi t f(t)$　　D. $2\pi t f(t)$

5. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+a}{2}}$，其中 $a>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 连续，但不可偏导　　B. 可偏导，但不连续

C. 可微，且 $df|_{(0,0)}=0$　　D. $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

二、填空题

1. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

2. 设 $u=x^{yz}$，则 $du=$_____.

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=2\end{cases}$，在点 $(1,2,-1)$ 处切线的方向向量 $\vec{\tau}=$_____.

4. 设函数$u=xy^2+z^3-xyz$，则在$(1,-1,1)$处沿方向角为$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}$的方向$\vec{l}$的方向导数为

_____.

5. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=$_____.

三、计算题

1. 设函数$z=f(x^2-y^2,e^{xy})+\frac{y}{g(x^2+y^2)}$其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 设函数$F(x,y)$具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$是由方程$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$确定的隐函数，试求：

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求积分$\iint\limits_{(D)}\ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中$(D)$是$x^2+y^2\le 4$位于第一象限的部分.

4. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数 $u(x,y,z)=f(r)$，其中 f 具有二阶连续导数：

（1）把 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 表示成 r 的函数.

（2）若 u 满足 $\Delta u=0$，求 $f(r)$.

5. 设向量值函数 $f(x,y,z)=(x\sin x, ye^z, \cos(xz))^T$，求 $\overline{f}$ 的 Jacobi 矩阵.

6. 求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在闭区域 $x^2+2y^2\le 3$ 的最大值与最小值.

7. 计算二重积分 $\iint\limits_{(D)}\left|\dfrac{x+y}{2}-x^2-y^2\right|d\sigma$，其中 $(D):x^2+y^2\le 1$.

2023高数下期中答案

1.选择题

1. D

D.$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处在该点连续是可微的必要条件,则该点若不可微，一定不可微，D正确
B C.连续与该点值是否存在，该点导函数值是否存在无必然联系，BC错
A 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a, f(x_0,y_0)=b$，由已知“不连续”可得a与b不相等，但无法判断a是否存在
故A错

2. D
知识点: 多元函数可微的必要条件和充分条件

解： 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 二重极限存在, 且偏导数存在, 但 $f(x,y)$ 的偏导数 (即偏导函数) 不一定连续, 应选 (D).
(D) 是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的充分条件,但不是必要条件.例如
$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 可验证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 但一阶偏导函数不连续.

3. C
由已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 得:
$f(0,0)=1, f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续;

$$
\begin{aligned}
f_x'(0,0)&=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right)\\
&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{|x|}-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{|x|}{x}\right),
\end{aligned}
$$

该极限不存在, 所以 $f_x'(0,0)$ 不存在;

$$
\begin{aligned}
f_y'(0,0)&=\lim_{y\to0}\left(\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\right)\\
&=\lim_{y\to0}\left(\frac{e^{y^2}-1}{y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{y^2}{y}\right)=0
\end{aligned}
$$

所以 $f_y'(0,0)$ 存在。
综上所述, 选C
4. C
函数 $f(x,y)$ 只在 $(0,0)$ 附近有定义,在 $(0,0)$ 处可偏导, 由此不能推出其在 $(0,0)$ 可微, 也不能保证存在切平面, 仅当 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微时, (A) 才成立,所以不能选 (A).

曲面在 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量若存在的话应为 $\vec{n}=\{3,1,-1\}$ 或 $\vec{n}=\{-3,-1,1\}$; 而仅有偏导存在不能推出法向量存在,故(B)不成立.

曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为

$$\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{3,1,-1\}\times\{0,1,0\}=\{1,0,3\},$$

故选C

5. D
   由题可得

$$\iint_D\left(x+y^2\right)dxdy=\iint_D xdxdy+\iint_D y^2dxdy$$

   设 $f(x,y)=x,g(x,y)=y^2$, 由于
   $f(-x,y)=-x=-f(x,y),g(x,-y)=(-y)^2=y^2=g(x,y),g(-x,y)=g(x,y)$
   所以 (x,y) 对 x 是奇函数, $g(x,y)$ 对 y 是偶函数, 对 x也是偶函数, 由于 D 关于 x 轴、 y 轴对称, 所以

$$\begin{aligned}&\iint_D xdxdy=0,\\&\iint_D y^2dxdy=4\iint_{D_1}y^2dxdy,\text{ 所以}\\&\iint_D\left(x+y^2\right)dxdy=4\iint_{D_1}y^2dxdy,\text{ 选 D}\end{aligned}$$

二.填空题

6. 答案： 0

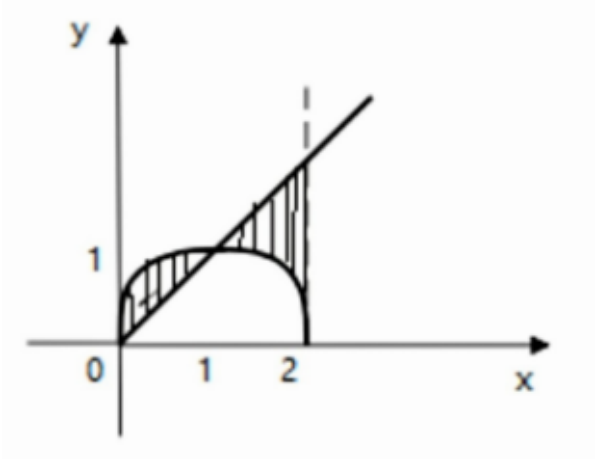
$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x+y}\\=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x+y}\\=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y}\\=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2-xy+y^2\right)\\=&0\end{aligned}$$

考查极限的计算。

7. 答案:

$$\int_0^1dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^y f(x,y)dx$$

   由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 得 $(x-1)^2+y^2=1$
   (上半部分)
   $y=x$
   先画出积分区域



由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 得 $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$

交换积分次序后

$$原式 =\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)dx$$

8. 答案： $8\sqrt{2}$

由于 $f(x,y)=x^2y^3$ 在点 (2.1) 的两个方向导数为:

$$f_x(2,1)=4, f_y(2,1)=12.$$

而方向 $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$ 的方向余弦为:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$所以\ \left.\frac{dv}{dl}\right|_{(2,1]}=\frac{du}{dx}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{du}{dy}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=8\sqrt{2}$$

故方向导数为 $8\sqrt{2}$

9. 答案：-2

解:设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy},$$

$$\because$$

$$f_x(x,y,z)=y^2z^3+3xy^2z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\cdot\left(-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}\right)$$

$$\therefore f_x(1,1,1)=1-3\times1=-2\ 。$$

10. 答案：$2\pi e$

解:

$$
\begin{aligned}
&D=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq t^2\right\} \\
&\iint_0^{\sin \sqrt{x^2+y^2}} d x d y \\
&=\int_0^{2 \pi} d \theta \int_0^t e^{\sin r} r d r \\
&=2 \pi \int_0^t e^{\sin \theta r} r d r \\
&\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F^{\prime}(t)}{t}=\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \pi e^{\sin t} t}{t} \\
&=\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \pi e^{\sin t} \\
&=2 \pi e .
\end{aligned}
$$

三 计算题

1 解:

$u=y f\left(\frac{x}{y}\right)+x g\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial u}{\partial x}=f^{\prime}\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x} g^{\prime}\left(\frac{y}{x}\right),$ (2 分)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y} f^{\prime \prime}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2} g^{\prime}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2} g^{\prime}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3} g^{\prime \prime}\left(\frac{y}{x}\right)$

$=\frac{1}{y} f^{\prime \prime}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3} g^{\prime \prime}\left(\frac{y}{x}\right),$ (4 分)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{x}{y^2} f^{\prime \prime}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x} g^{\prime}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x} g^{\prime}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2} g^{\prime \prime}\left(\frac{y}{x}\right)$

$=-\frac{x}{y^2} f^{\prime \prime}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2} g^{\prime \prime}\left(\frac{y}{x}\right),$ (5 分) 故 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0.$ (6 分)

2.解: 将方程组两边分别对 x 求导并化简移项得 $\begin{cases} z \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x}=-x \\ y \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}+z \frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x}=0 \end{cases}$ (1 分)则曲线在点 $(1,1,3)$ 处的切量为 $\boldsymbol{T}|_{(1,1,3)}=\left.\left(1, \frac{x}{y},-\frac{x}{z}\right)\right|_{(1,1,3)}=(1,1,-\frac{1}{3})$(4 分)取切向量为 $\bar{T}\big|_{(1,1,3)}=(3,3,-1),$ 则切线方程为: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1},$(5 分)法平面方程为: $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0,$ 即 $3x+3y-z=3$

3.解: $x_1=1$， $x_2=0, u_1=0, u_2=-1, u_3=0$ (1 分)

$$
D \vec{w}=\begin{bmatrix} \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 & 0 \\ u_3 & 0 & u_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \\ \frac{1}{x_1} & \sin x_2 \\ 3 x_1^2 x_2 & x_1^3 \end{bmatrix}(3 \text{ 分})
$$

$$
D \vec{w}\big|_{(1,0)}=\begin{bmatrix} \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \cos 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},(4 \text{ 分})
$$

$$
d \vec{w}\big|_{(1,0)}=\begin{bmatrix} 0 & \cos 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d x_1 \\ d x_2 \end{bmatrix}(6 \text{ 分})
$$

4 解:

方程组两端对 x 求偏导数, 得 $\begin{cases} 3 u^2 \frac{\partial u}{\partial x}+v+x \frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 3 v^2 \frac{\partial v}{\partial x}+y \frac{\partial u}{\partial x}=1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3 u^2 \frac{\partial u}{\partial x}+x \frac{\partial v}{\partial x}=-v \\ y \frac{\partial u}{\partial x}+3 v^2 \frac{\partial v}{\partial x}=1 \end{cases}$ (1 分)解此方程组, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-v & x\\ 1 & 3v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{-\left(3v^3+x\right)}{9u^2v^2-xy'} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}3u^2 & -v\\ y & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{-\left(3v^3+x\right)}{9u^2v^2-xy}$$

再对方程组两端对 y 求偏导数, 得 $\begin{cases}3u^2\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=1\\ 3v^2\frac{\partial v}{\partial y}+u+y\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$

$$\begin{cases}3u^2\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=1\\ y\frac{\partial u}{\partial y}+3v^2\frac{\partial v}{\partial y}=-u\end{cases}(4\text{ 分 })$$

解此方程组，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}1 & x\\ -u & 3v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{3v^2+xu}{9u^2v^2-xy}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}3u^2 & 1\\ y & -u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}}=\frac{-\left(3u^2+x\right)}{9u^2v^2-xy}$ (6 分)

5. 解:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},(1\text{ 分})$

$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(2\text{ 分})$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\ (3\text{ 分})$

$\left(5a^2+12a+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(5b^2+12b+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$

$\therefore \begin{cases}5a^2+12a+4=0, 10ab+12(a+b)+8\neq 0 & (5\text{ 分})\\ 5b^2+12b+4=0,\end{cases}$

$$\begin{cases}a=-2,\\ b=-\frac{2}{5}\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\ b=-2\end{cases}(6\text{ 分})$$

四. (共 12 分)

解: $\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0\cdot 1=0=f(0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连练. (4 分)

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$, 故 $f_x(0,0)=0$, 同理 $f_y(0,0)=0$. (8 分)
由于 $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}\frac{\sin\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta f-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{|\Delta x|\sin\left(2\Delta x^2\right)}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{3/2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\sin\left(2\Delta x^2\right)}{\sqrt{2}|\Delta x|\cdot 2\Delta x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. (12 分)

五. (共8 分)

解：过点 M 的切平面方程为 $8x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0$ (其中 X,Y,Z 是切平面上任意一点的三个坐标分量). 化为截距式,得 $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{Y}{\frac{y}{y}}+\frac{z}{\frac{1}{2}}=1$.故过点 M 的切平面与三个坐标面图成的

三棱雉的体积 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}\cdot\frac{4}{z}=\frac{8}{3xyz}$ (2 分)
题目所求转化为求目标函数 $V=\frac{8}{3xyz}$ 在约束条件 $4x^2+y^2+z^2=4$ 下的最小值点问题. 作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=\frac{8}{3xyz}+\lambda\left(4x^2+y^2+z^2-4\right)$, (4 分)
令

$$\begin{cases}F_x=-\frac{8}{3x^2yz}+8\lambda x=0\\F_y=-\frac{8}{3xy^2z}+2\lambda y=0\\F_z=-\frac{8}{3xyz^2}+2\lambda z=0\\F_\lambda=4x^2+y^2+z^2-4=0\end{cases}$$

得唯一驻点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

由 V 的实际意义可知 V 必有最小值, 且求得 V 在第一卦限部分可能的极值点只有 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, 故 V必在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 处取得最小值.即过椭球面上点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 的切平面与三个坐标面围成的三棱锥体积最小。(8 分)

六 (共8 分)
解:
必要性: 由 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ 知 $\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{1}{y}f'$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial x}{\partial y}=0$.
充分性: 令 $v=y,u=\frac{x}{y}$, 则 $z=z(x,y)$ 变为 $z=z(yu,v)=f(u,v)$ 且
$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$, 由条件 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}=0$,知 $\frac{\partial f}{\partial v}=0$
则 f 仅是 u (的函数， $z=f(u)$， 即 $z=f\left(\frac{x}{y}\right),\cdots\cdots$ (8 分)

七 (共7 分)
令 $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$, 则 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+Ay$ ， (1 分) 则:

$$\begin{aligned}\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_D x\left(x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+Ay\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D x^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+A\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由于 xy 关于 x (或 y)为奇函数, D 关于 y (或 x) 轴对称, 所以 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. (2 分)
利用对称性, 有

$$\begin{aligned}&\iint_D x^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1\rho^3\mathrm{e}^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^2\mathrm{e}^{\rho^2}\,\mathrm{d}\left(\rho^2\right)=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\rho^2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\rho^2\mathrm{e}^{\rho^2}-\mathrm{e}^{\rho^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

于是 $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A=\frac{\pi}{2}$

(2) 由(1) 知, $f(x,y)=x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+\frac{\pi}{2}y$, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^2+y^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2+y^2},\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}+4x^2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}.$$

2022 年高等数学下期中试题解析

彭康学导团

一、选择题

1. C

解析.

(A) 反例：对于

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

易得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ 假设 f(x,y) 可微, 则

$$\Delta f=df(0,0)+o(\rho)=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+o(\rho)=o(\rho)$$

但

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

极限不存在。故 A 错误。

(B) 反例: 易知 (A) 中 $f(x,y)$ 满足任意方向导数存在, 但不可微.

(C) 正确，证明如下: 由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

可得

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}=0=f_x(0,0),\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{\sqrt{y^2+0^2}}=0=f_y(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(f(x,y)-f(0,0))-\left(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

所以 C 正确。

(D) 反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/3}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

易验证上式满足 D, 但不可微。 □

2. D

解析. 对于 $x^2+y^2=z^2+9z=0, z=4$ 围成的区域, 拆分成 $x^2+y^2=9, z=0, z=4$ 围成的圆柱和边缘部分。又有

$$\iiint f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=\iint\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\mathrm{d}z$$

所以

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^4 f(\rho^2+z^2)\,\mathrm{d}z+\int_0^{2x}\mathrm{d}\theta\int_3^5\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{\rho^2-9}}^4 f(\rho^2+z^2)\,\mathrm{d}z.$$

正确。所以答案为 D。

□

3. B

解析. 运用拉格朗日中值定理有:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x-\sin(2y)}{x-2y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-2y)\cos\xi}{x-2y}=\cos\xi=1.$$

□

4. B

解析. 由已知条件可知, 我们可以将 x 看成参数, 即: $f(x,y)\Leftrightarrow f(y)$, 原命题可转化为: 设 $f(y)$ 满足

$$f(y)=2, f(0)=1, f'(0)=x\Rightarrow f(y)=1+xy+y^2$$

故选 B. □

5. A

解析. 复习定义：由二重积分的计算：积分区域 D 是由两条直线 $x=a, x=b$ 与两条曲线 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ 所围成，即：

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$$

则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

从图形理解，取原区域高度为 $\mathrm{d}y$ 的一层，其宽度为 $(\pi - \arcsin\ y) - \arcsin\ y$，所以对高度 $\mathrm{d}y$ 求积分和宽度 $\mathrm{d}x$ 求积分，即：

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin\ y}^{\pi-\arcsin\ y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

故选 A. □

二、填空题

1. 1

解析. 曲面在 $P(0,0,1)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n_1} = (F_x, F_y, F_z) = (0,0,2)$，故外法线 $\boldsymbol{l}$ 方向上的单位向量可取为 $\boldsymbol{n_2} = (0,0,1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$。故

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(0,0,1)} = f_x(0,0,1)\cos\alpha + f_y(0,0,1)\cos\beta + f_z(0,0,1)\cos\gamma = 1$$

□

2. $2e^2$

解析. 关于 x 求偏导：

$$f_x = (x+1)e^{x+y} + \ln y \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1+x^2y^2})^2} \frac{1+x^2y^2-2xy^2(x+y)}{(1+x^2y^2)^2}$$

代入 $x=1, y=1$，不难得到 $f_x(1,1) = 2e^2$。 □

3. $-\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

解析. 利用一阶全微分形式不变性，由给定方程两端求全微分得

$$zx^{z-1}\mathrm{d}x + x^z \ln x \mathrm{d}z + \mathrm{d}y = yz^{y-1}\mathrm{d}z + z^y \ln z \mathrm{d}y + 2x\mathrm{d}x$$

当 $x=1, y=1$ 时，$z=1$, 故 $\mathrm{d}z|_{(1,1)} = -\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$。 □

4. $\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解析. 累次积分

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

对应的重积分的积分域

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}, y \le x\}$$

则

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

□

5. $\frac{8}{5}\pi$

解析. 设 $V : x^2+y^2+z^2 \le 1$

$$I = \iiint_{(V)} (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2\,\mathrm{d}V \quad = \iiint_{(V)} (x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}V$$

又注意到 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 关于 $x=y=z$ 对称，再利用三重积分的轮换对称得:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{(V)} (x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{3}\iiint_{(V)} \left(f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)\right)\,\mathrm{d}V \\ &= 2\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

再令 $x^2+y^2+z^2 = r^2$, 利用球坐标代换得:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

则

$$I = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 2r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r \quad = \frac{4}{5}\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{5}\pi.$$

□

三、计算题

1. **解析.** 先根据链式求导法则得:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + f_2 \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \sin x)$$

再对 y 进行求导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =& \frac{\partial}{\partial y}(2f_1 + y\cos x f_2) \\ =& 2\left(f_{11}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y) + f_{12}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right) + \cos x f_2 \\ &+ \left(f_{21}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y) + f_{22}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right) y\cos x \\ =& -2f_{11} + (2\sin x - y\cos x) f_{12} + y\sin x\cos x f_{22} + \cos x f_2\end{aligned}$$

□

2. **解析.**

$$\mathrm{d}x = -2u\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}v + \mathrm{d}z \tag{1}$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

由 (1)(2) 得

$$\mathrm{d}u = -\frac{z}{2uz+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2uz+1}\mathrm{d}y + \frac{z-v}{2uz+1}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{2uz+1}\mathrm{d}x - \frac{2u}{2uz+1}\mathrm{d}y + \frac{2uv+1}{2uz+1}\mathrm{d}z$$

所以得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}$$

□

3. **解析.** 设 $f(x,y,z) = x^2 + x + \cos(xy) + yz$

$$f_x = 2x + 1 - y\sin(xy) \quad f_y = -x\sin(xy) + z \quad f_z = y$$

曲面 $x^2 + x + \cos(xy) + yz = 0$ 在点 $P(0,1,-1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,-1,1)$。切平面方程为 $x - (y-1) + z + 1 = 0$ 即

$$x - y + z + 2 = 0$$

从而法线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}.$$

□

4. **解析.** 由积分区域得：设区域

$$\begin{aligned}
D_1&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,0\le y\le x\}\\
D_2&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le y,0\le y\le 1\}\\
I&=\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{e}^{\max(x^2,y^2)}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(D_1)}\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{(D_2)}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y+\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1
\end{aligned}$$

□

5. **解析.** 由于

$$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}\qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2+y^2+(z-1)^2=1(z\le 1)$$

从而这是一个圆心 $(0,0,1)$，半径为 1 的下半球，而

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

是一个圆锥，从而 V 是一个球体去掉圆锥所形成的立体。又注意到 x,y 关于积分区域对称，以及

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

从而

$$\iiint\limits_V(xy+xz+yz)\,\mathrm{d}V=0\qquad\Longrightarrow\qquad I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}V.$$

利用球坐标代换

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{64\pi}{5}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{15}$$

□

6. 解析. 由于

$$f_x(x,y)=3x^2+2(x+y);\qquad f_y(x,y)=3y^2+2(x+y)$$

令 $f_x(x,y),f_y(x,y)=0$ 有

$$\begin{cases}3x^2+2(x+y)=0\\3y^2+2(x+y)=0\end{cases}$$

两式相减有

$$x^2=y^2$$

从而若 $x=y$，那么

$$3x^2+4x=0\qquad\Longrightarrow\qquad x=0\text{或}x=-\frac{4}{3}$$

若 $x=-y$，那么

$$3x^2=0\qquad\Longrightarrow\qquad x=y=0$$

故 $f(x,y)$ 的驻点为 $\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$ 或 $(0,0)$。又计算得

$$f_{xx}(x,y)=6x+2,\ f_{yy}(x,y)=6y+2,\ f_{xy}(x,y)=2$$

从而

$$\begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6x+2&2\\2&6y+2\end{vmatrix}=(6x+2)(6y+2)-4$$

- 当 $x=y=-\frac{4}{3}$ 时，$6x+2<0,(6x+2)(6y+2)-4>0$，此时 $f(x,y)=\frac{64}{27}$，为极大值。
- 当 $x=y=0$ 时，$6x+2>0,(6x+2)(6y+2)-4=0$，此时 $f(x,y)=0$，不能确定是否为极值。

综上，$f(x,y)$ 的极大值是 $\frac{64}{27}$。 □

7. **解析.** 由公式 $D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})=D(\boldsymbol{f}(g(x_0))Dg(x_0)$, 可得:

$$D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2u & 2v\\ v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin x & \cos y & \sec^2 z\\ \exp(x+y+z) & \exp(x+y+z) & \exp(x+y+z)\end{pmatrix}$$

因为当 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时,$(u,v)^{\mathrm{T}}=(1,1)^{\mathrm{T}}$, 故:

$$D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(x)|_{(0,0,0)^T}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

□

四

解析.

1. 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^{2022}+y^{2022}+\lambda(x^2+y^2-1)$，得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2022x^{2021}+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2022y^{2021}+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

解该方程组得到，最大值为 1，最小值为 2^{-1010}。

2. 构造函数

$$\varphi(x,y)=g(x,y)-(x^2+y^2)$$

在边界 $x^2+y^2=1$ 处，$\varphi(x,y)\le 1-1=0$，而 $\varphi(0,0)=g(0,0)\ge 0$。故 $\varphi(x,y)$ 的最大值必在区域内取到，而此时最值点必然是驻点，设其为 (ξ,η)，故有

$$g_x(\xi,\eta)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=\xi}+2\xi=2\xi,$$
$$g_y(\xi,\eta)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=\eta}+2\eta=2\eta.$$

从而

$$g_x(\xi,\eta)^2+g_y(\xi,\eta)^2=4(\xi^2+\eta^2)<4.$$

□

2021 年高数下期中

一、填空题

1. 0

解析: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y+o(x^2y)}{x^2+y^2}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2}\right|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}|y|=0$.

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

2. $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

解析: 对 x, y 求偏导, 有: $z+(x+1)z_x=2xf(x-2,y)+x^2f_x(x-2,y)$, $(x+1)z_y-2y=x^2f_y(x-2,y)$. 把 $x=0,y=1$ 代入原方程得 $z=1$. 进一步, 把 $x=0,y=1,z=1$ 代入求偏导的结果, 得到 $z_x\big|_{(0,1)}=-1,z_y\big|_{(0,1)}=2$. 故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

3. $2\sqrt{6}$

解析: $u=2xy-z^2$ 的梯度为 $(2y,2x,-2z)$. 在 $(2,-1,1)$ 处, 梯度为 $(-2,4,-2)$, 故最大值 $\sqrt{2^2+4^2+2^2}=2\sqrt{6}$.

4. $x^2\varphi_x(x,y)-xy\varphi_y(x,y)$

解析: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{3x^2}+\varphi_x(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{3x}+\varphi_y(x,y)$, 故 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=x^2\varphi_x(x,y)-xy\varphi_y(x,y)$.

5. $ab\pi$

解析: 令 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, 则 $\iint\limits_D(x+y+1)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(ar\cos\theta+br\sin\theta+1)ab r\mathrm{d}\theta$

$=ab\left(\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}ar^2\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}br^2\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\theta\right)=ab\pi$.

二、计算题

1. 令 $u=x^2y,v=\dfrac{y}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\cdot 2xy+f_v\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_u}{\partial y}\cdot 2xy+2x\cdot f_u+\frac{\partial f_v}{\partial y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)f_v$$

$$=\left(f_{uu}\cdot x^2+f_{uv}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot 2xy+2x\cdot f_u+\left(f_{vu}\cdot x^2+f_{vv}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}f_v$$

$$=2x^3yf_{uu}+yf_{uv}-\frac{y}{x^3}f_{vv}+2xf_u-\frac{1}{x^2}f_v$$

也可参考课本写法:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xyf_1-\frac{y}{x^2}f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+2x^3yf_{11}+yf_{12}-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^3}f_{22}$$

2. 两端对 x,y 求偏导数, 有

$$2x-6y-2yz_x-2zz_x=0 \qquad (1)$$

$$-6x+20y-2(z+z_y\cdot y)-2zz_y=0 \qquad (2)$$

令 $z_x=0,z_y=0$, 有 $\begin{cases}x-3y=0\\-3x+10y=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3y\\z=y\end{cases}$, 代入方程得

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases}$$

由式(1), (2)对 x, y 求偏导, 得

$$2-2yz_{xx}-2zz_{xx}-2(z_x)^2=0$$

$$-6-2z_x-2z_{xy}\cdot y-2z_yz_x-2zz_{xy}=0$$

$$20-4z_y-2yz_{yy}-2(z_y)^2-2zz_{yy}=0$$

(i) 在点 $(9,3,3)$ 处 Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, 是正定矩阵. 则 $(9,3)$ 为极小值点, 极小值为 3;

(ii) 在点 $(-9,-3,-3)$ 处 Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$, 是负定矩阵. 则 $(-9,-3)$ 为极小值点, 极小值为-3.

3. 由题意, 有 $u=-\dfrac{y}{x^2-y^2}, v=\dfrac{x}{x^2-y^2}$.

(1) 直接求导: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\left(x^2-y^2\right)^{-2}\cdot 2x=\dfrac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)^{-2}}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-x\left(x^2-y^2\right)^{-2}\cdot(-2y)=\dfrac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$.

(2) 或两边取全微分 $\begin{cases} x\mathrm{d}u+y\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y \\ y\mathrm{d}u+x\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x \end{cases}$, 有 $\mathrm{d}u=\dfrac{\begin{vmatrix} -u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y & y \\ -u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}=\dfrac{vy-ux}{x^2-y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{uy-vx}{x^2-y^2}\mathrm{d}y$,

$\mathrm{d}v=\dfrac{\begin{vmatrix} x & -u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y \\ y & -u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}=\dfrac{uy-vx}{x^2-y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{vy-ux}{x^2-y^2}\mathrm{d}y$. 易得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{vy-ux}{x^2-y^2}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{vy-ux}{x^2-y^2}$, 结合 u, v 表达式亦可得到答案.

4. 取 $\begin{cases} 2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0 \\ 2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$, 代入 P 点有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y=\mathrm{d}z$. 于是该点处切向量 $(1,-1,1)$.

则切线为 $\dfrac{x-\frac{R}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}=\dfrac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{1}\Rightarrow x-\dfrac{R}{\sqrt{2}}=-y+\dfrac{R}{\sqrt{2}}=z-\dfrac{R}{\sqrt{2}}$;

法平面为 $\left(x-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)-\left(y-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)+\left(z-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=0\Rightarrow x-y+z-\dfrac{R}{\sqrt{2}}=0$.

5. 由题意, 有

$\begin{cases} \mathrm{d}y=2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y \end{cases}$, 代入点 $(1,2,1)$ 得切向量 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=(1,2,10)$ 与 z 轴正向夹角为锐角.

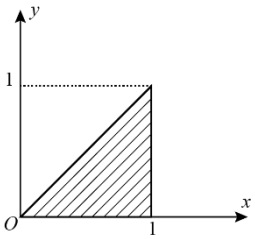
f 的梯度向量$\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}x,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}y,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}z\right)$，代入$(1,2,1)$得$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

故沿向量$\vec{a}$的方向导数为$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\cdot(1,2,10)\frac{1}{\sqrt{105}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

6. 设$x=r\cos\theta,y=\sin\theta(0\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi)$.

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\left(1-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho=5\pi.$$

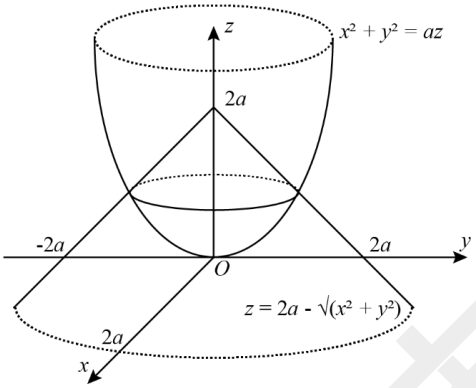
7. 积分区域为



$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x\sin\frac{y}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(-x^2\cos\frac{y}{x}\right)\Bigg|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1-x^2(\cos1-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos1+\frac{1}{3}$$

8. 图形为



由题意可得交线在xOy平面投影为$x^2+y^2=a$.

令$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le a}2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(2a-\rho-\frac{\rho^2}{a}\right)\rho\mathrm{d}\theta=\frac{5}{6}a^3\pi.$$

9. 设$x=1+\rho a\cos\theta\sin\varphi,y=\rho b\sin\theta\sin\varphi,z=1+\rho c\cos\varphi$，则

$$\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}V=abc\left(\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(1+\rho c\cos\varphi\right)^2\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=abc\left(\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(\rho^2\sin\varphi+\rho^4c^2\cos^2\varphi\sin\varphi+\rho^3c\sin2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=abc\cdot2\pi\left(\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{5}c^2\times\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{15}c^2\right)\pi abc$$

10. $D\vec{w}=\begin{bmatrix}u_2u_3 & u_1u_3 & u_1u_2\\ u_2\cos u_1 & \sin u_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\cos x_2}{x_1} & -\left(\ln x_1\right)\sin x_2\\ \cos x_1 & 1\\ 2x_1e^{x_2} & x_1^2e^{x_2}\end{bmatrix}$，结合$\vec{u}=\vec{g}(\vec{x})$，有$D\vec{w}\big|_{(0,1)}=\begin{bmatrix}\sin1 & 0\\ \sin1 & 0\end{bmatrix}$.

三、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|f(x,y)\right|\le\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{|x|+|y|}+\frac{y^2}{|x|+|y|}\right)\le\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}\frac{x^2}{|x|}+\frac{1}{2}\frac{y^2}{|y|}=0=f(0,0)$，故$f(x,y)$连续.

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-0}{x}=0,f_y(0,0)=0$，在$(0,0)$处 Jacobi 矩阵记为$L$，是零矩阵.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{f(x,y)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{|x|^2\left(1+|k|\right)\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{k^2}{\left(1+|k|\right)\sqrt{1+k^2}}$ 与 k 的值有关, 则 $(0,0)$ 处不可微.

四、取抛物面上一点, 记为 (a,b,a^2+b^2+1), 此处切平面为 $2a(x-a)+2b(y-b)-[z-(a^2+b^2+1)]=0$.

$$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2+1-\left(2ax-2by-a^2-b^2+1\right)\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S-2a\pi+\left(a^2+b^2\right)\pi.$$

当 $\dfrac{\partial V}{\partial a}=-2\pi+2a\pi=0,\dfrac{\partial V}{\partial b}=2b\pi=0$, 即 $a=1,b=0$ 时(切平面 $z=2x$), 有最小体积

$$V_{\min}=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left((x-1)^2+y^2\right)\mathrm{d}S\overset{x=1+r\cos\theta,y=r\sin\theta}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

五、(1) 充分性: 设 $F(x,y,t)=\dfrac{1}{t^n}f(tx,ty)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-n\frac{1}{t^{n+1}}f(tx,ty)+\frac{1}{t^n}\left(xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)\right)=-n\frac{1}{t^{n+1}}f(tx,ty)+n\frac{1}{t^{n+1}}f(tx,ty)=0.$$

所以 $F(x,y,t)$ 为关于 x,y 的函数, $F(x,y,t)=F(x,y,1)=f(x,y)$, 所以 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

充分性得证.

(2) 必要性: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, 对 t 求导, 有 $f_x(tx,ty)\cdot x+f_y(tx,ty)\cdot y=nt^{n-1}f(x,y)$.

令 $t=1$, 有 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

必要性得证.

2020 年高等数学下期中试题解析

一、填空题

1. $\mathrm{d}z=e^{x^2y}\mathrm{d}(x^2y)=e^{x^2y}(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)=2xye^{x^2y}\mathrm{d}x+x^2e^{x^2y}\mathrm{d}y$

2.对表达式两侧取全微分： $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=e^{xz}(x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x)-\mathrm{d}z$

整理， $(xe^{xz}-1)\mathrm{d}z=(y-ze^{xz})\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

自然有： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-ze^{xz}}{xe^{xz}-1}$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y=-2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x=4,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-2z=-2$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)_{\max}=|\nabla u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}=2\sqrt{6}$$

4.对两表达式取全微分： $\begin{cases}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0\\ x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z=0\end{cases}$

代入参数，有： $\begin{cases}3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0\\ 3\mathrm{d}x+\mathrm{d}z=0\end{cases}$

参照此得切线方向向量： $\vec{n}=(1,-3,-3)$

自然有切线方程：$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-3}$

5.积分路径为下半圆周，参考 L 解析式有：$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L \mathrm{d}s=\pi$

二、计算下列各题：

1. 由于 f 有二阶连续偏导数，因此求导顺序不影响二阶混合偏导数的解析式。依此，设：$e^{x+y}=u,\frac{x}{y}=v$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}e^{x+y}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}e^{x+y}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y^2}+e^{x+y}\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial x}-\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial x}\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}e^{x+y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}e^{x+y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{y}$$

综合上述表达式，有：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}e^{x+y}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}e^{2x+2y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{e^{x+y}}{y}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{xe^{x+y}}{y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{x}{y^3}$$

证完。

2. 设切点 (x_0,y_0,z_0)，有：$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$

对曲面方程在该点处取全微分，$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y_0}}+\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z_0}}=0$

据此列写切面方程：$\frac{(x-x_0)}{\sqrt{x_0}}+\frac{(y-y_0)}{\sqrt{y_0}}+\frac{(z-z_0)}{\sqrt{z_0}}=0$

参照切面方程计算截距：$\begin{cases}a=\sqrt{x_0}\\ b=\sqrt{y_0}\\ c=\sqrt{z_0}\end{cases}$

构造截距积函数 $u(x_0,y_0,z_0)=abc=\sqrt{x_0y_0z_0}$

以曲面方程作为约束条件，应用 Lagrange 乘子法，设 Lagrange 乘子 λ：

$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\sqrt{x_0y_0z_0}-\lambda(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}-1)$

得方程组：$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_0}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y_0z_0}{x_0}}-\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x_0}}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y_0}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x_0z_0}{y_0}}-\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{1}{y_0}}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z_0}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x_0y_0}{z_0}}-\dfrac{\lambda}{2}\sqrt{\dfrac{1}{z_0}}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}-1=0\end{cases}$

求解该方程组得唯一解条件：$\sqrt{x_0}=\sqrt{y_0}=\sqrt{z_0}=\dfrac{1}{3}$

依此列写切平面方程：$x+y+z-\dfrac{1}{3}=0$

证完。

3. 对函数方程组求全微分：$\begin{cases}\mathrm{d}u+\mathrm{d}v+\mathrm{d}w=\mathrm{d}x\\ (v+w)\mathrm{d}u+(u+w)\mathrm{d}v+(u+v)\mathrm{d}w=\mathrm{d}y\\ vw\mathrm{d}u+uw\mathrm{d}v+uv\mathrm{d}w=\mathrm{d}z\end{cases}$

基于线性非齐次方程组的求解方法（Gauss 消元或 Cramer 法则均可）得：

$$\mathrm{d}u=\frac{u^2\mathrm{d}x-u\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{(u-v)(u-w)}$$

基于此，得：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u^2}{(u-v)(u-w)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-u}{(u-v)(u-w)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{(u-v)(u-w)}\end{cases}$

证完。

另解（不做推荐，因为不是所有题都有取巧的方法）：
对原方程做变化得

$$\begin{aligned}&v+w=u-x\\&vw=y-u(u-x)\\&z-u\left[y-u(u-x)\right]=0\end{aligned}$$

对其做全微分得

$$\mathrm{d}z-u\mathrm{d}y+u^2\mathrm{d}x-\left(y-2ux+3u^2\right)\mathrm{d}u=0$$

代入$\begin{cases}u+v+w=x\\ uv+vw+wu=y\end{cases}$并求解得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u^2}{(u-v)(u-w)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-u}{(u-v)(u-w)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{(u-v)(u-w)}\end{cases}$$

证完。

4. 基于柱坐标换元方法求解：

$$I=\iint\limits_{(D)}(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a}(1-\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_{a\cos\theta}^{a}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta+\frac{1}{3}a^3\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}a^2-(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9})a^3$$

证完。

5. 参考积分面的对称性可知：$\iint\limits_{(\Sigma)}(x+y+z)\mathrm{d}s=\iint\limits_{(\Sigma)}z\mathrm{d}s$

在积分面上有：$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\end{cases}$

由此，积分微元 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

自然有：$\iint\limits_{(\Sigma)}z\mathrm{d}s=\iint\limits_{(\Sigma)}a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3$

证完。

三、交线方程可以描述为：$\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，即 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$

此时显而易见地 $z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

那么，对积分式，有：$\iiint\limits_{(\Omega)}z\mathrm{d}V=\iint\limits_{(D)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z=\iint\limits_{(D)}(\frac{a^2}{2}-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $(D)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\frac{a^2}{2}\right\}$

作极坐标换元：

$$\iint\limits_{(D)}(\frac{a^2}{2}-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}(\frac{a^2}{2}-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}(a^2-2\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

根据积分式计算得：

$$\iiint\limits_{(\Omega)}z\mathrm{d}V=\pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}(a^2-2\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^4}{8}$$

证完。

四、此题积分路径甚复杂，几乎不可能用一般路径积分方法计算得到。

但注意到：题设积分表达式 $(x^2y+3xe^x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}(x^3-y\sin y)\mathrm{d}y$ 可视作个二元的、一阶偏导数连续的函数之全微分。

由此计算势函数：

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int(x^2y+3xe^x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}(x^3-y\sin y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3}x^3y+3(x-1)e^x+\frac{1}{3}(y\cos y-\sin y)+C\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数。

因此，自然地，该路径积分只与始末位置有关而与积分路径无关，自然有：

$$\int\limits_L=u(\pi,2)-u(0,0)=\frac{2}{3}\pi^3+3(\pi-1)e^\pi+3+\frac{1}{3}(2\cos 2-\sin 2)$$

证完。

五、设 Σ'为以原点为圆心，半径为 ε 的上半球面之上侧，Σ_1 为 Σ'、Σ 两曲面与 z=0 平面之交线围城的平面图形的上侧。

设场向量 $\vec{u}=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})$

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}-\frac{3}{2}\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}=0$$

因此，参考 Gauss 定理，有：$I=\iiint\limits_{(\Omega)}(\nabla\cdot\vec{u})\mathrm{d}V+\iint\limits_{(\Sigma')}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\iint\limits_{(\Sigma_1)}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

显然地：$\iiint\limits_{(\Omega)}(\nabla\cdot\vec{u})\mathrm{d}V=\iint\limits_{(\Sigma_1)}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$

而参考第二型面积分方法可得，$\iint\limits_{(\Sigma')}\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{(\Sigma')}\mathrm{d}S=2\pi$

因此：$I=\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=2\pi$

证完。

六、1）考虑积分表达式形式变换：$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{(\partial\Omega)}(\nabla f)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$

依据 Gauss 定理，有：

$$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}(\nabla f)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{(\partial\Omega)}(\nabla f)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\limits_{(\Omega)}\nabla^2 f\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(\Omega)}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2})\mathrm{d}V$$

依题设，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

自然地有：$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{(\Omega)}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2})\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(\Omega)}0\mathrm{d}V=0$

2）$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(\nabla f)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$

依 Gauss 定理，有：

$$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(\nabla f)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(\nabla f)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\limits_{(\Omega)}\nabla\cdot(f\nabla f)\mathrm{d}V$$

其中：$\nabla\cdot(f\nabla f)=\nabla\cdot\left(f\frac{\partial f}{\partial x},f\frac{\partial f}{\partial y},f\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}+\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y}+\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial z})}{\partial z}$

全展开，

$$\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}+\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y}+\frac{\partial(f\frac{\partial f}{\partial z})}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2$$

考虑到$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，$\nabla\cdot(f\nabla f)=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2$

即$\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{(\Omega)}[(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2]\mathrm{d}V$。

3）参考本题 2）节，有：$\begin{cases}\oiint\limits_{(\partial\Omega)}f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{(\partial\Omega)}[(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2]\mathrm{d}V\\ f(x,y,z)\equiv 0,(x,y,z)\in(\partial\Omega)\end{cases}$

基于此，显然地有：$\iiint\limits_{(\partial\Omega)}[(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2]\mathrm{d}V=0$

考虑到$(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2\geq 0$

则可知对于$(x,y,z)\in(\Omega)$，有$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$，否则该积分值必大于 0.

构造一型线积分表达式：

$$f(x_2,y_2,z_2)-f(x_1,y_1,z_1)=\int_L(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z)=\int_L(0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y+0\mathrm{d}z)=0$$

其中，任意选取的 1、2 两点分别为轨迹 L 的首尾两点，$L\subset\Omega$

由此不难看出，Ω 内任意两点的函数值差恒为 0，即 $f(x,y,z)\equiv C,(x,y,z)\in\Omega$。

证完。

2019 年高等数学下中试题详解

一、单选题

1. D

解析：$f(x,y)$为连续函数的复合，所以连续

$$\begin{cases}f_x(x,y)=\frac{1+\alpha}{2}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot 2x\\ f_y(x,y)=\frac{1+\alpha}{2}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot 2y\end{cases}$$

也为连续函数的复合，所以连续。并且 $f(x,y)$ 可偏导。

2.A

解析：在 OAB 上积分时：$\iint\limits_{\Delta OAB}xyd\sigma=0$；

在 OBC 上积分时，cosx 为偶函数，siny 为奇函数：$\iint\limits_{\Delta OBC}\cos x\sin yd\sigma=0\quad\iint\limits_{\Delta OBC}yd\sigma=0$

在 ΔOAB 上，由对称性：$\iint\limits_{\Delta OAB}\cos x\sin yd\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxd\sigma$

所以 $\iint\limits_D xy+\cos x\sin ydxdy=2\iint\limits_{D_1}cox\sin yd\sigma$

3.C

解析：曲面 $z=x^2-y^2+z^2$ 在(1,1,1)处切平面为：

x-y+z=1

直线方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$

在平面中任选两个不相关向量其均与（2，-2，1）垂直，则平面与直线垂直

4.D

解析：曲线参数方程$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\\ z=1-\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$

在（-1,1,1）处切线方向向量（-1,-1,2）

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}(2,-1,-1)=u'(2,-1,-1)\frac{\vec{a}}{\|a\|}=(4,-4,6)(-1,-1,2)^T\times\frac{1}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

由于切线方向向量有两个方向，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|_M=\pm 2\sqrt{6}$

5.A

解析：

$f(x,x^2)=x^3$ 则 $\frac{df}{dx}=f_x(x,x^2)+f_y(x,x^2)\cdot 2x=3x^2$

又有 $f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$ 所以求得 $f_y(x,x^2)=x+x^3$

二、填空题

1. $-\frac{\sqrt{2}}{2}(dx-\frac{\pi}{4}dy+dz)$

解析： $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

$$=-(\sin\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}\cdot e^{-\pi z}dx+(-\sin\frac{x}{y})\cdot(-\frac{x}{y^2})\cdot e^{-\pi z}dy+(\cos\frac{x}{y})\cdot e^{-\pi z}\cdot(-\pi)$$

令 x=1/4，y=1/π，z=0

$$du=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi dx+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 dy-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi dz$$

2. $-\sqrt{21}$

解析： $\nabla u=(-2y,-2x+2y,2z)$ 令 $x=1,y=-1,z=\frac{1}{2}$

$\nabla u=(2,-4,1)$，则方向导数最小值为 $-\sqrt{2^2+4^2+1}=-\sqrt{21}$

3. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

解析：画出简图即可得原积分式=$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

4. $4x^2+y^2\le 4$

解析：若要积分尽可能大，则取 $4-4x^2-y^2$ 取正值的区域进行积分

则积分区域为 $4x^2+y^2\le 4$，若取得更大，积分值会减小。

5. $2(x^2+y^2)f_1$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\int_{x^2-y^2}(x^2-y^2,\rho(x,y)\cdot 2x+\int_{\rho(x,y)}(x^2-y^2,\rho(x,y))\cdot\rho_x(x,y)\cdot y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int_{x^2-y^2}(x^2-y^2,\rho(x,y)\cdot(-2y)+\int_{\rho(x,y)}(x^2-y^2,\rho(x,y))\cdot\rho_y(x,y)\cdot x$$

则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y^2)f_{x^2-y^2}(x^2-y^2,\rho(x,y))$

三. 计算下列各题

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2-\frac{2xyg'}{g^2}$ （4’）

$$\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}f_2-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}+xye^{2xy}f_{22}-2xg^{-2}\left[gg'+2y^2gg''-4y^2(g')^2\right]$$ （8’）

2.证明：$\left\|\vec{r}'(t)\right\|=C\Rightarrow\left\langle\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right\rangle=C^2$ （2’）

两边对 t 求导：$2\left\langle\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle\vec{r}'(t),\vec{r}(t)\right\rangle=0$ （4’）

所以 $\frac{d(\langle\vec{r}(t),\vec{r}(t)\rangle)}{dt}=0$ （6’）

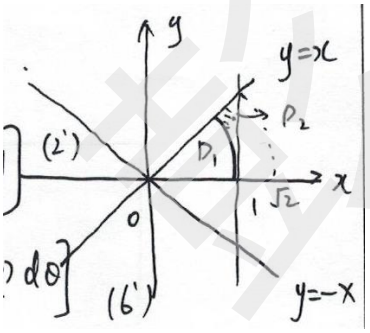
即 $\left\langle\vec{r}(t),\vec{r}(t)\right\rangle=C\Rightarrow\left\|\vec{r}(t)\right\|=C$ （8’）

四. 计算下列各题

1. $\int_0^2 r\ln(1+r^2)dr\overset{(4')}{=}\frac{\pi}{4}\int_0^4\ln(1+t)dt$ （6’）（t=r²）

$=\frac{\pi}{4}\left[(1+t)\ln(1+t)\Big|_0^4-\int_0^4 dt\right]=\frac{\pi}{4}(5\ln 5-4)$ （8’）

2.



$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=4\left[\iint_{D_1}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+\iint_{D_2}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy\right]$$

$$=4\left[\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho f(\rho)d\theta+\int_1^{\sqrt{2}}d\rho\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}}\rho f(\rho)d\theta\right]$$

$$=\pi\int_0^1\rho f(\rho)d\rho+\int_1^{\sqrt{2}}(\pi-4\arccos\frac{1}{\rho})\rho f(\rho)d\rho$$

3. ① $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$

同理可得：$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}$

② 对 $f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}=0$ 分离变量得： $\frac{df'(r)}{f'(r)}=-\frac{2}{r}dr$

积分得： $f'(r)=\frac{c_1}{r^2}\Rightarrow f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$

五. $\begin{cases}f_x=4x+6y=0\\f_y=6x+2y=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(0,0)\rightarrow f(0,0)=0$

在 D 边界上 令 $L(x,y,\lambda)=2x^2+6xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-3)$

解方程组： $L_x=0,L_y=0,L_\lambda=0$

解得 $\lambda=1$或$-\frac{7}{2}$ 即驻点为（$\pm1,\mp1$） （$\pm\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$）

$f(\pm1,\mp1)=-3(MIN)$， $f(\pm\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{21}{2}(MAX)$

六. $f(t)=e^{4\pi t^2}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}\rho f(\frac{1}{2}\rho)d\rho=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}\rho f(\frac{1}{2}\rho)d\rho$

$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\quad f(0)=1$

$f(t)=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1)$

七. 对于 $f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$，

两边求偏导： $\begin{cases}f'(x)g(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\f(x)g'(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$ 从中得： $xf(x)g'(y)=yf'(x)g(y)$

分离变量得 $\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}=C_1$ 从中得: $\begin{cases}f(x)=Ae^{\frac{1}{2}C_1x^2}\\g(y)=Be^{\frac{1}{2}C_1y^2}\end{cases}$

故 $F(x,y)=f(x)g(y)=ABe^{\frac{1}{2}C_1(x^2+y^2)}$

2018 年高数下期中

一、单选题

1. C

解析：曲面方程 $F(x,y,z)=\sin x\sin y\sin(x+y)-z$ $\therefore$ 任意一点法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$

$F_x=\sin y\left[\sin x\cos(x+y)+\cos x\sin(x+y)\right]$ $F_y=\sin x\left[\sin y\cos(x+y)+\cos y\sin(x+y)\right]$

$F_{z=}=-1$ $\therefore\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4})}=(\frac{3}{4},\frac{1}{4},-1)$ $\vec{z}=(0,0,1)$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{z}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{z}|}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　　$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{65}}{13}$

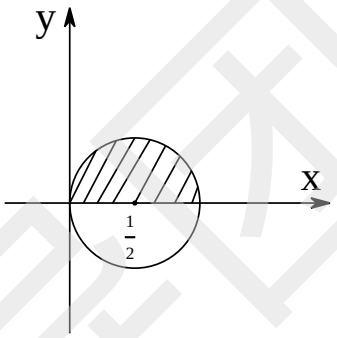
2. C

解析：由中值定理知 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使 $\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=\pi r^2 e^{x_0^2-y_0^2}\cos(x_0+y_0)$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{r\to0}e^{x_0^2-y_0^2}\cos(x_0+y_0)=1$

3. D

解析：$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\tan\theta\\ \sqrt{x^2+y^2}=\cos\theta\end{cases}$ $\Rightarrow$积分域边界 $x^2+y^2=x$　　结合图：



$(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　　$(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 也可以写为 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

4. B

解析：$f(x,1)=e^{x+1}(x-1)^{\frac{2}{3}}$　　$f_x(x,1)=e^{x+1}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]$　　$\therefore f_x(0,1)=\dfrac{1}{3}e$

$f(0,y)=e^y y^{\frac{1}{3}}$　　$f_y(0,y)=e^y\left[\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right]$　　$f_y(0,1)=\dfrac{4}{3}e$

5. B

解析：曲线在 t 的切线向量 $\vec{a}=(1,-2t,3t^2)$　　平面法向量 $\vec{n}=(1,2,1)$

切平面平行于平面 $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　　$\therefore 1-4t+3t^2=0$　　$\therefore t=\dfrac{1}{3}$ 或 1，有 2 解

二、填空题

1. $(\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9})$

解析：$gradu=(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})=(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2},\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2},\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2})$

代入 $M(1,2,-2)$　　$\therefore gradu|_M=(\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9})$

2. $\dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

解析：$f(x,1)=\arctan\sqrt{x}$，求导可得 $f_x(x,1)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

3. 0

解析：$F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln(\dfrac{z}{x})=0$ 隐函数由 $F(x,y,z)=0$ 确定

$F_x=\frac{1}{z}-\frac{x}{z}\cdot(-\frac{z}{x^2})=\frac{z+x}{zx}$　　$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{x}{z}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{z+x}{z^2}$　　$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x}$

$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}\right)=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}x-1\cdot z}{x^2}=\frac{\frac{z}{x}x-z}{x^2}=0$　　$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

4. $2\sqrt{5}$

解析：$gradu|_M=(0,2z,2y-2z)|_{(2,-1,1)}=(0,2,-4)$　　取方向$\vec{\alpha}=(0,\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$

$\therefore$方向导数$MAX=gradu|_M\cdot\vec{\alpha}=2\sqrt{5}$

5. $x+2y-z=2$

解析：椭球面$F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1=0$　　每点法向量$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$

$\therefore\vec{n}|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=(1,2,-1)$　　又$\vec{n}=(1,2,-1)$为切平面的法向量

故$(x-\frac{1}{2})+2(y-\frac{1}{2})-(z+\frac{1}{2})=0$　　化简后得：$x+2y-z=2$

三、解答题

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1e^{x+y}+f_2\frac{1}{y}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(f_1e^{x+y}+f_2\frac{1}{y})$

$\frac{\partial}{\partial y}(f_1e^{x+y})=f_1e^{x+y}+e^{x+y}(f_{11}e^{x+y}+f_{12}(-\frac{x}{y^2}))=e^{x+y}\left(f_1+f_{11}e^{x+y}-\frac{x}{y^2}f_{12}\right)$……（1）

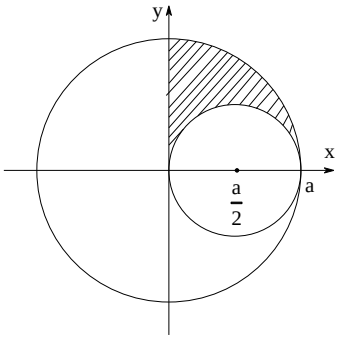
$\frac{\partial}{\partial y}(f_2\frac{1}{y})=f_2(-\frac{1}{y^2})+\frac{1}{y}(f_{21}e^{x+y}+f_{22}(-\frac{x}{y^2}))=-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{1}{y}f_{21}e^{x+y}-\frac{x}{y^3}f_{22}$……（2）

合并（1）（2）可得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

经整合$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1e^{x+y}+f_2\frac{1}{y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1e^{x+y}-\frac{1}{y^2}f_2+e^{2(x+y)}f_{11}+e^{x+y}\frac{y-x}{y^2}f_{21}-\frac{x}{y^3}f_{22}$

2. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$　　$\therefore dxdy=\rho d\rho d\theta$　　图：



$\therefore\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\iint_D(1-\rho)\rho d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a}(1-\rho)\rho d\rho=\frac{3\pi}{8}a^2-\frac{\pi}{6}a^3+\frac{2}{9}a^3$

3. 偏导数存在问题： $f(0,0)=0$ $f(x,0)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=0$ 同理 $f_y(0,0)=0$

偏导数连续问题： $f(0,0)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ $f_x(x,0)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to0}f_x(0,0)$ 不存在

同理可得 f_y 情况 $\therefore f_x$， f_x 在（0,0）处不连续

可微与否问题： $df=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$=0\Delta x+0\Delta y+\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\therefore$只要证明余项是否是 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\rho}=0$ $\therefore$是 ρ 的高阶无穷小

$\therefore f(x,y)$ 在（0,0）处可微， $df=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho)$

4. 设切线的方向向量为 $\vec{n}$，则它与 2 个面在该点的法向量皆垂直

平面法向量 $\vec{\alpha}|_{(1,1,1)}=(2,-3,5)$ 球面法向量 $\vec{\beta}|_{(1,1,1)}=(2x,2y,2z-3)=(2,2,-1)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{\alpha}=0\\\vec{n}\cdot\vec{\beta}=0\end{cases}$ $\therefore$可解得 $\vec{n}=(7,-12,-10)$ $\therefore$切线方程 $\frac{x-1}{7}=-\frac{y-1}{12}=-\frac{z-1}{10}$

法平面方程 $7(x-1)-12(y-1)-10(z-1)=0$ 得 $7x-12y-10z+15=0$

5. $y_{AB}=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ c 点范围在 $x\ge0,y\ge0$， ΔABC 面积最大化，则一定取两端

若是过端点（0,2），则 $y=-\frac{1}{3}x+2$， $S_{ABC}=\frac{2}{3}|AB|$

$\therefore$取端点（3,0），$\therefore y=-\frac{1}{3}x+1$ $S_{ABC}=\frac{7}{6}|AB|$ $\therefore$可求得点 C 是（3,0）时， ΔABC 面积最大化

6. $f(0)=e^0+0=1$ $f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}f(\frac{1}{2}\rho)\rho d\rho$，两边求导得 $f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$

先解齐次： $f'(t)=8\pi tf(t)$，即 $\frac{df}{dt}=8\pi tf(t)$ 即 $\frac{1}{f}df=8\pi tdt$ 积分得 $\ln f=4\pi t^2+C$

$\therefore f(t)=Ce^{4\pi t^2}$ 又$\because$是非齐次方程 令 $f(t)=h(t)e^{4\pi t^2}$ $f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}h(t)+h'(t)e^{4\pi t^2}$ 代入

$\therefore h'(t)e^{4\pi t^2}=8\pi te^{4\pi t^2}$ $\therefore h'(t)=8\pi t$ $\therefore h(t)=4\pi t^2+C$ $\therefore f(t)=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}$

又 $f(0)=1$ 解得 C=1　　$\therefore f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

2017 年高数下期中

一、单选题

1. D

解析：对于一元函数，可导$\Rightarrow$连续；对于二元函数，在一点处可偏导并不能保证 f 在此点连续

2. C

解析：$gradf|_M=(1,-1)$　　沿着梯度方向，方向导数最大，该处增长最快

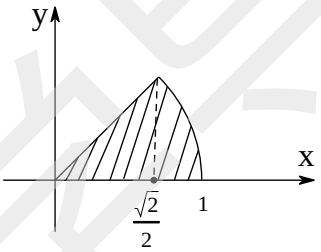
3. D

解析：$\therefore \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{|\Delta x\Delta y|}=0=f(x,y)\Big|_{x=0,y=0}$　　$\therefore$连续

$\because f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$　　$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$　　$\therefore$偏导数皆存在

4. C

解析：由三角形式可得到积分区域如图：



$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5. D

解析：$A=\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\delta$　　由对称性　　$A=\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\delta$

$\therefore 2A=\iint\limits_D(a+b)d\delta=(a+b)\times\dfrac{1}{4}\times\pi\times 4=(a+b)\pi$　　$\therefore A=\dfrac{1}{2}(a+b)\pi$

二、填空题

1. $dz|_{(1,0,-1)}=dx-\sqrt{2}dy$

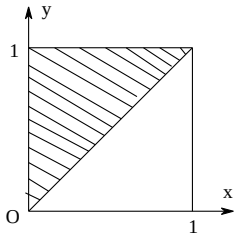
解析：$F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}=0$

$F_x=yz+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　　$F_y=xz+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　　$F_z=xy+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}|_M=-\dfrac{F_x}{F_z}|_M=1$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}|_M=-\dfrac{F_y}{F_z}|_M=-\sqrt{2}$　　$\therefore dz|_{(1,0-1)}=dx-\sqrt{2}dy$

2. $(\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9})$

解析：同 2018 年填空题第一题

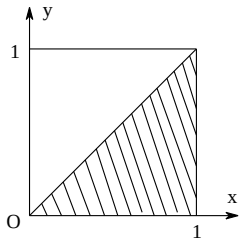


3. $\dfrac{1}{2}A^2$

解析：利用对称性 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)dy$ 积分区间如右图所示

利用对称性，积分与标识无关，故可以互换 x,y

$I=\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)dx$ 积分区间如右图所示



$\therefore 2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)dxdy=\int_0^1 dyf(y)\int_0^1 f(x)dx=A^2$ $\therefore I=\frac{1}{2}A^2$

4. $-\pi$

解析：$\lim\limits_{c\to 0}\iint\limits_{c\le x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy=\lim\limits_{c\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{c}}^1\ln\rho^2\rho d\rho d\theta=\lim\limits_{c\to 0}2\pi\int_{\sqrt{c}}^1\left(\ln\rho^2\right)\rho d\rho=\lim\limits_{c\to 0}\pi(\rho^2\ln\rho^2-\rho^2)\Big|_{\sqrt{c}}^1$

$=\lim\limits_{c\to 0}\pi\left[-1-c\ln c+c\right]=-\pi$

5. $\frac{xF_u}{zF_v}$

解析：$F_x=F_u\cdot 2x=2xF_u$ $F_z=F_v(-2z)=-2zF_z$ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{xF_u}{zF_v}$

三、计算题

1. 曲线在 t 处的切线向量 $\vec{\alpha}=(-\sin t,\cos t,\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}})$ $\vec{\alpha}|_{(0,1,1)}=\vec{\alpha}|_{t=\frac{\pi}{2}}=(-1,0,1)$

此也是法平面的法向量 $\therefore -1(x-0)+0+(z-1)=0$ $\therefore$ 法平面方程是 $x-z+1=0$

2. $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3=0$ $F_x=2y$ $F_y=2x$ $F_x=1-e^z$

曲面在（1, 2, 0）处的法向量 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,0)}=(4,2,0)$ $\vec{n}$ 为切平面的法向量，亦为法线方向向量 $\therefore 4(x-1)+2(y-2)=0$ 即 $2x+y-4=0$ 切线方程 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{0}$

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial x}=f_1-\frac{y^2}{x^2}f_2$ ……（1） 代入（1）得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2f_1-y^2f_2$

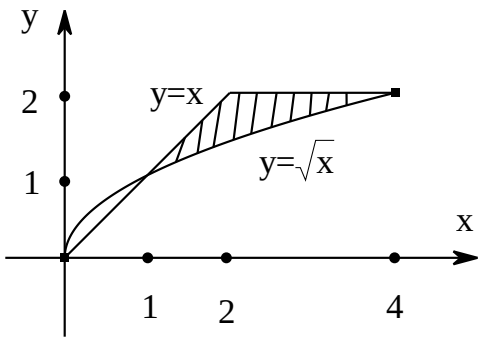
$\frac{\partial^2 z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=2f+2x\frac{\partial f}{\partial x}+2xf_1+x^2\frac{\partial f_1}{\partial x}-y^2\frac{\partial f_2}{\partial x}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}=f_{11}-\frac{y^2}{x^2}f_{12}$ ……（2） $\frac{\partial f_2}{\partial x}=f_{21}-\frac{y^2}{x^2}f_{22}$ ……（3）

代入（1）（2）（3）：$\frac{\partial^2 z}{\partial x}=2f+2xf_1-\frac{2y^2}{x}f_2+2xf_1+x^2f_{11}-y^2f_{12}-y^2f_{21}+\frac{y^4}{x^2}f_{22}$

又∵ f 具有连续二阶偏导，化简上式得：$\frac{\partial^2 z}{\partial x}=2f+4xf_1-\frac{2y^2}{x}f_2+x^2f_{11}-2y^2f_{12}+\frac{y^4}{x^2}f_{22}$

4. 画出积分区域，交换积分次序：



$$I=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2-\frac{2y}{\pi}\cos(\frac{\pi y}{2})dy=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

5. $I=\iint\limits_D xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2 d\rho d\theta$

$$=\frac{1}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{a^3\pi}{8}$$

6. $\vec{\alpha}=(2,0,0)$　　设该选定点为M　　$gradf|_M=(2x,2y,2z)$

方向导数最大$\Rightarrow gradf|_M$ // $\vec{\alpha}$　　$\therefore y=z=0$ 代入球面　　$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ 该点为$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$

7. 见 2018 年大题第 3 题

2016 年高数下期中

一、选择题

1. A

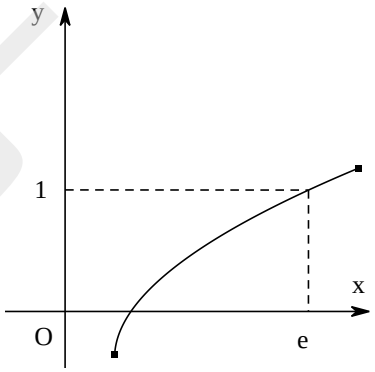
解析：$f(x,x^2)=x^3$ 对两边的 x 求导

$\therefore f_1+2xf_2=3x^2$　　$f_1=x^2-2x^4$

$\therefore 2xf_2=3x^2-x^2+2x^4=2x^2+2x^4$　　$\therefore f_2=x+x^3$

2. D

解析：如图



3. C

解析：A 中 $df(x,y)=3dx+dy$；B 中法向量为$(3,1,-1)$

4. B

解析：$(0,0)$处有定义，为 2　　又$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=2$　　∴连续

二、填空题

1. $z=0$

解析：曲面 $F(x,y,z)=\sin xy+\sin yz+\sin xz-1$　　$F_x=y\cos xy+z\cos xz$　　$F_y=x\cos xy+z\cos yz$

$F_z=y\cos yz+x\cos xz$　　切平面法向量$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,\frac{\pi}{2},0)}=(0,0,\frac{\pi}{2}+1)$　　$\therefore(\frac{\pi}{2}+1)(z-0)=0$　　$\therefore z=0$

2. $(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$

解析：同 2018 年填空题第 1 题

3. $-\frac{11}{5}$

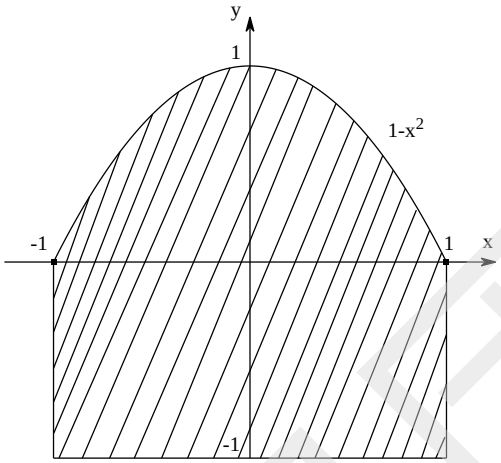
解析：$gradf\,|_{(1,-1)}=(3,-5)$　　$\therefore k=(3,-5)\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=\frac{9}{5}-\frac{20}{5}=-\frac{11}{5}$

4. $\frac{1}{2}A^2$

解析：同 2017 年填空题第三题

5. $I=\int_{-1}^{0}dy\int_{-1}^{1}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$

解析：如图



三、计算题

1. $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1e^{x+y}-\frac{x}{y^2}f_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1e^{x+y}+e^{x+y}(f_{11}e^{x+y}+f_{12}\frac{1}{y})-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^2}(f_{21}e^{x+y}+f_{22}\frac{1}{y})$$

2. 同 2018 年解答题第 2 题

3. 对于(x_0,y_0,z_0)来说切平面方程为：$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=1$　　$\therefore$截距为$\sqrt{x_0},\sqrt{y_0},\sqrt{z_0}$，截距之积为$\sqrt{x_0y_0z_0}$最大$\Rightarrow x_0y_0z_0$最大

又$\because$满足条件$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1$　　$\therefore L(x_0,y_0,z_0,\pi)=x_0y_0z_0+\pi(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}-1)$

又$\because$取最大值　$\therefore\frac{\partial L}{\partial x_0}=0$　$\frac{\partial L}{\partial y_0}=0$　$\frac{\partial L}{\partial z_0}=0$　$\frac{\partial L}{\partial \pi}=0$　　$\therefore x_0=y_0=z_0=\frac{1}{9}$

$\therefore$取点$(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9})$　　切平面方程为$x+y+z=\frac{1}{3}$

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2+y}\sqrt{x^2-y}}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-x^2+y}\sqrt{x^2-y}}$　　$\therefore$全微分$dz=\frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}}(\frac{xdx-\frac{1}{2}dy}{\sqrt{x^2-y}})$

5. 两个方程取全微分，并带入$(1,1,1)$ $\begin{cases}-dx+2dy+2dz=0\\2dx-3dy+5dz=0\end{cases}$　　$\therefore$可以得一解$(dx,dy,dz)=(16,9,-1)$

$\therefore$切线方程为$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$ 法平面方程为$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

6. $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{z+x}$　　$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(z+x)\frac{\partial z}{\partial x}-z(\frac{\partial z}{\partial x}+1)}{(z+x)^2}=-\frac{z^2}{(z+x)^3}$

四、综合题

1. $\begin{cases} dx = vdu + udv \\ dy = udu - vdv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{vdx + udy}{u^2 + v^2} \\ dv = \dfrac{udx - vdy}{u^2 + v^2} \end{cases}$ $\quad 4 = (\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial f}{\partial y})^2 = \dfrac{1}{u^2 + v^2}[(\dfrac{\partial g}{\partial u})^2 + (\dfrac{\partial g}{\partial v})^2]$

$\begin{cases} \dfrac{1}{4}[(\dfrac{\partial g}{\partial u})^2 + (\dfrac{\partial g}{\partial v})^2] = u^2 + v^2 \\ a(\dfrac{\partial g}{\partial u})^2 - b(\dfrac{\partial g}{\partial v})^2 = u^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\quad \therefore a = \dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{1}{4}$

2. 设直线 L 的方向向量为 (l,m,n) $\quad Fi(x,y,z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的法向量为 $(\dfrac{\partial Fi}{\partial x}, \dfrac{\partial Fi}{\partial y}, \dfrac{\partial Fi}{\partial z})|_{(x_0,y_0,z_0)}$

同时相切于 (x_0, y_0, z_0) 的 L $\quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ 又 $\therefore (l,m,n) \neq (0,0,0)$

$\therefore$ 左边矩阵行列式为 0 $\quad \therefore \dfrac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x,y,z)} = 0$

3. 同 2018 年解答题第 6 题

2015 年高数下期中

一、单选题

1. D

解析：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{y=0} = 0$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}|_{x=0} = 0$

按定义 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$ $\quad$ 故 x, y 偏导数存在

2. C

解析：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\nabla u| = \|(2x - 2z, 2y + 2, -2x)\| = \|(-2, 0, -2)\| = 2\sqrt{2}$

3. C

解析：切平面法向量 $(-y, -x, 2z)$ 与 $x - y + 2z - 1 = 0$ 的法向量平行 $\Rightarrow \dfrac{-y}{1} = \dfrac{-x}{-1} = \dfrac{2z}{2}$

代入 $z^2 - xy = 8 \Rightarrow (2, -2, 2)$

4. C

解析：$F(t) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^t f(\rho)\rho d\rho = \pi \int_0^t f(\rho)\rho d\rho$ $\quad F'(t) = \pi f(t) \cdot t$

5. C 和 D

解析： $f_x(x,y)=\frac{1+a}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a-1}{2}}\cdot 2x$　　$f_y(x,y)=\frac{1+a}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a-1}{2}}\cdot 2y$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{1+a}-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y^{1+a}-0}{\Delta y}=0$$

$\therefore df\big|_{(0,0)}=f_x(0,0)dx+f_y(0,0)dy=0$　故 C 正确

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1+a}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a-1}{2}}\cdot 2x=0$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f_y(x,y)=0$　　故 $f_x(x,y)$， $f_y(x,y)$ 连续，D 正确

二、填空题

1. z

解析： $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=z$

2. $yz\cdot x^{yz-1}dx+\ln x\cdot x^{yz}\cdot z+\ln x\cdot x^{yz}\cdot y$

解析： $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yz\cdot x^{yz-1}dx+\ln x\cdot x^{yz}\cdot z+\ln x\cdot x^{yz}\cdot y$

3. $(3,-2,-1)$

解析： $(2x,2y,2z)\times(1,1,1)\big|_{(1,2,-1)}=(3,-2,-1)$

4. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

解析： $\nabla u=\left(y^2-yz,2xy-xz,3z^2-xy\right)\big|_{(1,-1,1)}=(2,1,2)$　　$\nabla u\cdot(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=1+\sqrt{2}$

5. $\int_{-1}^{0}dy\int_{-1}^{1}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$

解析：同 2016 年填空题第 5 题

三、计算题

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2-\frac{2xy}{g^2(x^2+y^2)}g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x\frac{\partial f_1}{\partial y}+\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)f_2+ye^{xy}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{(2xg'+2xy\cdot 2y\cdot g'')g^2(x^2+y^2)-2g(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot 2xyg'}{g^4(x^2+y^2)}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}=-2yf_{11}+xe^{xy}f_{12}$　　$\frac{\partial f_2}{\partial y}=-2yf_{21}+xe^{xy}f_{22}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4xyf_{11}+2x^2e^{xy}f_{12}+(e^{xy}+xye^{xy})f_2-2y^2e^{xy}f_{21}+xye^{2xy}f_{22}$$

$$+\frac{2xg'g^2(x^2+y^2)+4xy^2g''g^2(x^2+y^2)-8xy^2g'g(x^2+y^2)}{g^4(x^2+y^2)}$$

综上可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+ye^{xy}f_2-\frac{2xy}{g^2(x^2+y^2)}g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}(1+xy)f_2-4xyf_{11}+2e^{xy}(x^2-y^2)f_{12}+xye^{2xy}f_{22}+\frac{2xg'g^2+4xy^2g''g^2-8xy^2g'g}{g^4(x^2+y^2)}$$

2. $F_x=\frac{F_1}{z}$，$F_y=\frac{F_2}{z}$，$F_z=-\frac{xF_1}{z^2}-\frac{yF_2}{z^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{zF_1}{xF_1+yF_2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{zF_2}{xF_1+yF_2}$　　$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(xF_1+yF_2)}{xF_1+yF_2}=z$

3. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\ln(1+\rho^2)\rho d\rho d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^2\ln(1+\rho^2)\rho d\rho$　　令 $\rho^2=t$

则 $\frac{\pi}{4}\int_0^4\ln(1+t)dt=\frac{\pi}{4}\left[(1+t)\ln(1+t)-(t+1)\right]\Big|_0^4=\frac{\pi}{4}\left[5\ln 5-4\right]$

4.（1）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{f'(r)}{r}+x\frac{\partial\frac{f'(r)}{r}}{\partial x}=\frac{f'(r)}{r}+x\frac{d\frac{f'(r)}{r}}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{f'(r)}{r}+\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^2}\frac{x}{r}\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{3f'(r)}{r}+\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^3}r^2=\frac{3f'(r)}{r}+f''(r)-\frac{f'(r)}{r}=f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}$$

$\therefore\Delta u=f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}$

（2）$\Delta u=0$，即 $f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}=0$　　设 $f'(r)=p(r)$　　$\therefore\frac{2p(r)}{r}+\frac{dp}{dr}=0$

解得 $p=\frac{k}{r^2}$　　$\therefore f(r)=\frac{C_1}{r}+C_2$

5. $\frac{\partial f_1}{\partial x}=\sin x+x\cos x$　　$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial z}=0$　　$\frac{\partial f_2}{\partial x}=0$　　$\frac{\partial f_2}{\partial y}=e^z$　　$\frac{\partial f_2}{\partial z}=ye^z$

$\frac{\partial f_3}{\partial x}=-z\sin(xz)$　　$\frac{\partial f_3}{\partial y}=0$　　$\frac{\partial f_3}{\partial z}=-x\sin(xz)$　　$\therefore$Jacobi 矩阵：$J=\begin{bmatrix}\sin x+x\cos x & 0 & 0\\ 0 & e^z & ye^z\\ -z\sin(xz) & 0 & -x\sin(xz)\end{bmatrix}$

6. $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x+6y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=6x+2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$ $\quad A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$ $\quad B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6$ $\quad C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

$\therefore AC-B^2<0$ $\quad\therefore f(0,0)$不是极值 $\quad$ 故最值一定在边界上取到，即满足$x^2+2y^2-3=0$

设$L(x,y,\lambda)=2x^2+6xy+y^2+\lambda(x^2+2y^2-3)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=4x+6y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=6x+2y+4\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+2y^2-3=0\end{cases}\Rightarrow \lambda=1\text{或}\lambda=-\frac{7}{2}$$

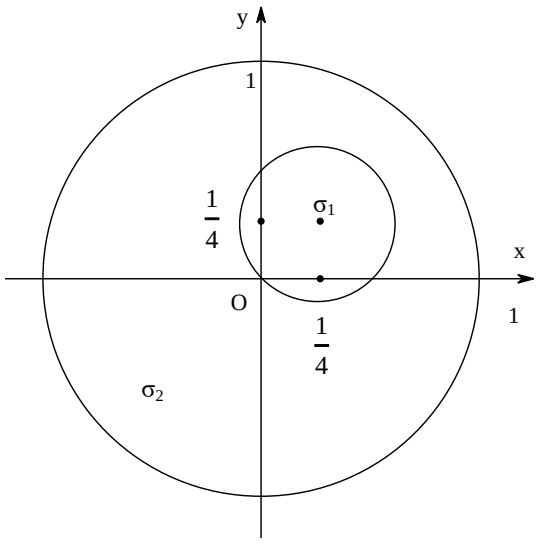
$\therefore x=1$， $y=-1$ 或 $x=-1$， $y=1$ 或 $x=\sqrt{2},y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=-\sqrt{2},y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f(1,-1)=-3$ $\quad f(-1,1)=-3$ $\quad f(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{21}{2}$ $\quad f(-\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{21}{2}$

$\therefore$最小值为-3，$(1,-1)$或$(-1,1)$时取到；最大值为$\dfrac{21}{2}$，$(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$或$(-\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$时取到

7. 在圆内时，$I_1=\iint\limits_{\sigma_1}(\dfrac{x+y}{2}-x^2-y^2)d\sigma$；在圆外时，$I_2=\iint\limits_{\sigma_2-\sigma_1}(x^2+y^2-\dfrac{x+y}{2})d\sigma$

$\sigma_1:(x-\dfrac{1}{4})^2+(y-\dfrac{1}{4})^2\le\dfrac{1}{8}$ $\quad\sigma_2:x^2+y^2\le 1$



$$I_1=\iint\limits_{\sigma_1}\left[-(x-\frac{1}{4})^2-(y-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{8}\right]d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}\frac{1}{8}d\sigma-\iint\limits_{\sigma_1}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{64}-\frac{\pi}{128}=\frac{\pi}{128}$$

$$I_2=\iint\limits_{\sigma_2}\left(x^2+y^2-\frac{x+y}{2}\right)d\sigma-\iint\limits_{\sigma_1}\left[(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}\right]d\sigma$$

$$=\iint\limits_{\sigma_2}(x^2+y^2)d\sigma-\iint\limits_{\sigma_1}\left[(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2\right]d\sigma+\iint\limits_{\sigma_1}\frac{1}{8}d\sigma$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\rho^3 d\rho+\iint\limits_{\sigma_1}\frac{1}{8}d\sigma=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{128}+\frac{\pi}{64}=\frac{65\pi}{128}$$

$\therefore I=I_1+I_2=\dfrac{33}{64}\pi$.