数学物理方程 (B 卷) 2026.01.06

整理：治学部 | 出品：南洋学辅

声明：本资料仅供内部交流学习使用，严禁用于商业用途。

一、选择题 (每题 3 分，共 30 分)

1. 下列选项中可以刻画一根均匀柔软细线振动的方程是 ( )

A. $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$　　B. $u_t-a^2u_{xx}=0$

C. $u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0$　　D. $u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0$

2. 下列选项是未知函数的三阶线性偏微分方程的是 ( )

A. $u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0$　　B. $t^3u_t-u_{tt}=0$

C. $u_{xxx}u_y=0$　　D. $u_{tt}-x^3u_{xxx}=u$

3. 对于方程 $\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda\rho^2R(\rho)=0$，$\lambda>0$，下列说法正确的是 ( )

A. 是欧拉方程，通过变换 $\rho=e^s$ 可以转换成常系数线性微分方程

B. 是贝塞尔方程，通解为 $R(\rho)=C_1J_0(\sqrt{\lambda}\rho)+C_2N_0(\sqrt{\lambda}\rho)$

C. 是欧拉方程，通解为 $R(\rho)=C_1\rho^{\sqrt{\lambda}}+C_2\rho^{\sqrt{-\lambda}}$

D. 不是贝塞尔方程，通解为 $R(\rho)=C_1J_0(i\sqrt{\lambda}\rho)+C_2N_0(i\sqrt{\lambda}\rho)$

4. 对于各向同性的圆柱体导体，半径为 1，高为 4，下底面和侧面的电势 0，上底面的电势为 $1-(x^2+y^2)$，圆柱各处的电势为 u，以下说法**错误**的是 ( )

A. 直角坐标系下该定解问题可表示为 $\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ x^2+y^2<1,\ 0<z<4\\ u|_{z=0}=0,\ u|_{z=4}=1-(x^2+y^2),\ x^2+y^2<1\\ u|_{x^2+y^2=1}=0,\ 0\le z\le 1\end{cases}$

B. 特征函数系可表示为 $R_m(\rho)=J_0(\mu_m^{(0)}\rho),\ m=1,2,3,\dots$

C. 极坐标下该定解问题可表示为 $\begin{cases}u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+u_{zz}=0,\ 0\le\rho<1,\ 0<z<4\\ u(\rho,0)=0,\ u(\rho,4)=1-\rho^2,\ 0\le\rho<1\\ u(1,z)=0,\ 0\le z\le 1\end{cases}$

D. θ 为极角，$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\neq 0$

5. 对于方程 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\ -\pi<x<\pi\\ X(-\pi)=X(\pi),X'(-\pi)=X'(\pi)\end{cases}$，其特征值和特征函数分别为 ( )

A. $n^2,\ c\cos nx+d\sin nx,\ n=0,1,2,\dots$　　B. $n^2,\ c\cos nx+d\sin nx,\ n=1,2,3,\dots$

C. $n^2,\cos nx,\ n=0,1,2,\dots$　　D. $n^2,\sin nx,\ n=1,2,3,\dots$

6. 下列关于贝塞尔函数的说法**错误**的是 ( )

A. $\dfrac{2}{x}J_1(x)=J_0(x)+J_2(x)$　　B. $J_n(0)=0,\ n\in\mathbb{Z}$

C. $(x^{-1}J_1(x))'=-x^{-1}J_2(x)$　　D. $J_3(x)$ 是奇函数

7. 设 $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$，则能将方程 $u_{xx}+u_{yy}=2\cos x+xy$ 齐次化的其中一个 $w(x,y)$ 可表示为 (　　)

A. $2\sin x+\dfrac{1}{3}x^3y$　　B. $-2\sin x+\dfrac{1}{3}x^3y$

C. $2\cos x+\dfrac{1}{6}x^3y$　　D. $-2\cos x+\dfrac{1}{6}x^3y$

8. 对于边界条件 $u(0,t)=t,\ u(2,t)=\sin t$。构造辅助函数 $w(x,t)$ 使得 $v=u-w$ 满足齐次边界条件。$w(x,t)$ 可取为 (　　)

A. $tx-\cos t$　　B. $\dfrac{\sin t-t}{4}x^2+tx$

C. $tx^2+\dfrac{\sin t-t}{4}x$　　D. $\dfrac{\sin t-2t}{4}x^2+tx$

9. 对于定解问题 $\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\ 1<x^2+y^2<4\\ u(x,y)=3,\ x^2+y^2=1\\ u(x,y)=4,\ x^2+y^2=4\end{cases}$，以下说法正确的是 (　　)

a. 使用分离变量法需转换为极坐标系 b. 使用分离变量法需齐次化边界条件 c. 该问题的特征值和特征函数分别为 n^2 $\{\cos n\theta,\ \sin n\theta\},\ n=1,2,3,\ldots$

A. ab　　B. abd　　C. abc　　D. ad

10. 对于无界线振动的柯西问题 $\begin{cases}u_{tt}-16u_{xx}=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0\\ u(x,0)=2x^2+1,\ u_t(x,0)=4,\ -\infty<x<+\infty\end{cases}$，其解为 (　　)

A. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[2(x+16t)^2+1+2(x-16t)^2+1]+\dfrac{1}{32}\displaystyle\int_{x-16t}^{x+16t}4\mathrm{d}\tau$

B. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[2(x+4t)^2+1+2(x-4t)^2+1]+\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{x-4t}^{x+4t}4\mathrm{d}\tau$

C. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(4+4)+\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_{x-4t}^{x+4t}(2\tau^2+1)\mathrm{d}\tau$

D. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(4+4)+\dfrac{1}{32}\displaystyle\int_{x-16t}^{x+16t}(2\tau^2+1)\mathrm{d}\tau$

二、填空题 (每题 4 分，共 20 分)

11. 一根长为 l 的柔软细弦，右端 $x=l$ 处固定，左端 $x=0$ 连接一根弹性系数为 k 的轻质弹簧，弹簧下端固定在弦振动的平衡位置处，写出该定解问题的边界条件_____。

12. 三维拉普拉斯问题的基本解为_____，若 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则方程 $\Delta u=0$ 的通解为 _____

13. $x^2y''+xy'+(x^2-16)y=0$ 是_____方程，通解为 _____。

14. 若 $u_{xy}=x^2y$，则 $u_x(x,y)$ 可表示为_____，$u(x,y)$ 可表示为_____。

15. 设 $\mu_m^{(0)}$ 是 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点，则 $\displaystyle\int_0^{\mu_m^{(0)}}J_1(x)\mathrm{d}x=$_____，$\Gamma(3/2)=$_____。

三、计算题 (共 50 分)

16. (13 分) 用分离变量法求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \pi,\ 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x,\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

17. (10 分) 特征线法求解方程:

$$\begin{cases} 2u_t + (x\cos t)u_x + tu = 0,\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2},\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

18. (12 分) 已知区域 $\Omega : \{(x,y)|y > 3x\}$, 对于定解问题 $\begin{cases} \Delta u = 0,\ (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$, 求该问题的格林函数 G, 并求解该定解问题 (G 的方向导数使用偏导数表示即可, 不必求出)。

19. (15 分) 对于各向同性的圆柱体导体, 半径为 1, 高为 h, 下底面和侧面的电势 0, 上底面的电势为 $1-\rho^2$, 圆柱各处的电势为 u

(1) 写出对应的定解问题

(2) 使用分离变量法求解该定解问题