西安交通大学 2024 年秋（计试）算法分析与设计期末试卷

一、判断说明题（正确的填 √，不正确的填 ×，并给出正确答案）（每题 3 分，共 45 分）

1、 算法的空间复杂度的渐近表示与时间复杂度的渐近表示类似，通常忽略低阶项和常数项。

2、 主方法常被用于形如 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ 的递归式的时间复杂度分析，但并非适用于任意形式的递归式。

3、 已知一个算法的递归式为 $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$。随着 n 的增大，该算法运行时间的增长速度接近于指数级增长。

4、 分治法求解排序问题时，如果输入序列已经有序，尽管合并操作的时间复杂度依然是 $O(n)$，但是整个算法最好情况下的时间复杂度降低到 $O(n)$。

5、 用动态规划算法求解最长公共子序列问题时，如果输入序列长度分别为 m 和 n，$m \ll n$ (m 远小于 n)，那么用类似于《算法设计与分析》（第四版）教材 2.9 节线性时间选择问题中把每一组数的大小定为 5，L 选取 75 作为递归调用分界点等的设计思想，m 可以视为一个常数，此时算法的时间复杂度在渐进下可简化为 $O(n)$。

6、《算法设计与分析》(第四版) 教材 3.9 节中介绍了一种利用跳跃点集结合动态规划的方法，利用 0-1 背包问题中存在重叠子问题降低时间复杂度，该方法在求解 0-1 背包问题时需要 $O(\min(nc, 2^n))$ 的计算时间，其中 c 为背包容量。之所以 0-1 背包问题可以在多项式时间内完成求解（0-1 背包问题是一个经典的 NP 难问题），是因为跳跃点集的增长规模是成指数级的，通过这种空间爆炸的方式换取了时间复杂度的下降。

7、 活动选择问题中，贪心算法总是选择结束时间最早的活动。

8、 利用回溯法求解图的 m 着色问题时，图的连通性越强，即边数越多时，剪枝效果越明显，算法的效率也越高。

9、 分支限界法中一个活结点最多有两次机会成为扩展结点。

10、 概率算法所求得的都是近似解，但是解的精度一般会随计算时间的增加而提高，这是因为概率算法内置有全概率模型或概率图模型，这些模型需要较长的收敛时间以计算准确的数学期望。

11、 拉斯维加斯算法总是能在有限时间内给出正确解。

12、 若 $A \leq_p B$，问题 A 的计算时间下界为 $T(n)$，则问题 B 的计算时间下界为 $T(n) + O(poly(n))$。

13、 在证明团（CLIQUE）问题是 NP 难时，首先，设 $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ 是一个 3 元合取范式，且 $C_r = l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r$，$r = 1, 2, \ldots, k$；然后，对于 ϕ 中的每个合取式，定义图 G 中与 l_i^r 对应的 3 个顶点，分别设为 v_1^r, v_2^r, v_3^r，非约定顶点的编号为 $3(r-1)+i$，$1 \le i \le 3$，$1 \le r \le k$；接着，遍历任意一对顶点，如果满足条件，那么就建立连接这一对顶点的边，其中条件分别满足 $r \ne s$ 且 $l_i^r \ne \overline{l_j^s}$，可以进一步证明，用上述方法构造出的图 G，满足 ϕ 是可满足的当且仅当 G 有一个 k 团。

14、 若对某 NP 完全问题存在多项式时间近似算法，且近似比为常数，则该问题必然在 P 类中。

15、 近似算法的相对误差必须是非负的。

二、分析解答题（共 26 分）

1. （10 分）玻璃瓶强度测试

对玻璃瓶做强度测试，设地面高度为 0，从 0 向上 n 个高度，依次记为 $1, 2, \ldots, n$，其中任何两个高度之间的距离都相等。如果一种玻璃瓶从高度 i 落到地上没有摔破，但从高度 $i+1$ 落到地上摔破了，那么就将该种玻璃瓶的强度记为 i。

(1) 假设任一种玻璃瓶有足够多的、相同的测试样品，设计一个算法，使用最少的测试次数测出该种玻璃瓶的强度，并说明算法在最坏情况下的时间复杂度。

(2) 假设任一种玻璃瓶有且只有 2 个相同的测试样品 ($k = 2$)，设计一个算法，在测试次数尽可能少的情况下测出该种玻璃瓶的强度，并说明算法在最坏情况下的时间复杂度。

(3) 将 (2) 中的方法推广到任意给定的 k ($k > 2$) 的情况，其中 k 代表相同的测试样品的个数。

2. （10 分）Fibonacci 数与编码

已知 Fibonacci 数 $f(n)$ 的递归式为：$f(0) = 1, f(1) = 1; f(n) = f(n-1) + f(n-2)(n > 1)$ 。其非递归表达式为：$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$ 。

(1) 设有字符集为英文字母集，若字符 $a \sim h$ 出现的频率恰好是前 8 个 Fibonacci 数，则它们的哈夫曼编码应该是什么？

(2) 进一步画出对应的编码树。

(3) 推广到 n 个字符，用数学归纳法证明，若 n 个字符的频率恰好是前 n 个 Fibonacci 数，可以构建哈夫曼编码树。

3. （6 分）8 皇后问题

给定一个 8×8 的矩阵（棋盘），要求在矩阵中布放 8 个元素（皇后），满足没有任何两个元素（皇后）处于同一行、同一列、对角线或与对角线平行的任一斜线上。

(1) 什么是显式约束？什么是隐式约束？给出本问题的显式约束和隐式约束条件。为了方便描述，你可以对矩阵（棋盘）的行、列，以及元素（皇后）进行编号。

(2) $n = 4$ 时，画出本问题的解空间树结构。

三、分析设计题（共 25 分）

1. （10 分）商店选址问题

一条笔直的公路两旁有 n 个位置 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 可以开商店，其中位于位置 x_i 商店的预期收益是 $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$ 。如果任意两个商店之间的距离必须大于等于 d, 那么如何选择一组开设商店的位置，使得这些商店的总收益最大?

(1) 用组合优化的思想建立该问题的数学模型，定义选择变量，写出在变量定义下的目标函数和对应的约束条件。

(2) 设计一个算法求解该问题，说明算法设计思想，结合伪代码分析算法在最坏情况下的时间复杂度。

2. （15 分）石子合并问题

一个操场上顺序摆放着 n 堆石子。要将石子有次序地合并成一堆。规定每次只能选相邻的两堆石子合并成新的一堆，合并的费用与合并后新的一堆石子的石子数成正比。请按下列要求设计并优化算法，使得 n 堆石子最终合并成一堆所需的合并总费用最少。

(1) 说明该问题的最优子结构性质，设计一个时间复杂度为 $O(n^3)$ 的动态规划算法，写出动态规划的递归式，给出算法实现的伪代码，并结合伪代码说明时间复杂度；

(2) 按照《算法设计与分析》（第四版）教材 10.2 节中的方法，证明 (1) 中的递归式满足四边形不等式性质，再利用四边形不等式对 (1) 中的算法进行优化，给出一个加速后时间复杂度为 $O(n^2)$ 的新算法，给出算法实现的伪代码，并结合伪代码说明其时间复杂度；

(3) 按照《算法设计与分析》（第四版）教材 10.3 节中的方法，定义最小相容结点，给出最小相容合并算法：利用相同层序定理，设计一个算法，从最小相容合并树的根节点出发，递归的标记各结点的层序，再根据各结点的层序按相邻性规则重组，得到最优合并树。给出上述算法实现的伪代码，并结合伪代码说明为什么算法的时间复杂度进一步降至 $O(n \log n)$。