西安交通大学 2024 年秋（计试）算法分析与设计期末试卷

一、判断说明题（正确的填 √，不正确的填 ×，并给出正确答案）（每题 3 分，共 45 分）

1、 已知 $f(n)=3n^2+2n+1, g(n)=n^3$，因为 n^3 的增长速度比 $3n^2+2n+1$ 快，所以 $g(n)$ 是 $f(n)$ 的上界，记作 $g(n)=O(f(n))$。

2、 已知 $T(n)=\begin{cases}1 & n\le 1\\ T(\frac{n}{2})+T(\frac{n}{3})+cn & n>1\end{cases}$，根据主定理可以计算出 $T(n)$ 的渐进复杂度为 $O(n\log n)$，其中常数项可以进一步简化，即 $T(n)$ 的渐进复杂度为 $O(n\log n)$。

3、 快速排序算法在每次迭代计算的过程中，由首个元素分选得到的 2 个元素子集是 2 个子问题，不需要再相互进行比较，所以满足最优子结构性质，是少数也满足最优子结构性质的分治算法。

4、 在解决一个具有组合爆炸特性的问题时，如旅行商问题 (TSP)，若将分治法与贪心算法结合，即先对城市集合进行分治划分，在子问题中使用贪心算法求解局部最优路径，最后合并子问题路径，这样做并不能保证得到全局最优解，且可能比单纯使用一种算法更耗时。

5、 动态规划算法在求解过程中可以按照任意顺序求解子问题。

6、 Kruskal 算法在求最小生成树时，不需要对边进行排序。

7、 回溯法求解 N 皇后问题，如果将棋盘扩大一倍（即从 $N\times N$ 拓展为 $2N\times 2N$），在不改变算法基本策略的情况下，算法的搜索空间将呈指数级增长，导致运行时间大幅增加。

8、 分支限界法对于所有的组合优化问题都能在有限时间内找到最优解。

9、 舍伍德算法的基本思想是：设 A 是一个确定性算法，当它的输入实例为 x 时所需的计算时间记为 $t_A(x)$。设 X_n 是算法的输入规模为 n 的实例的全体，则当问题的输入规模为 n 时，算法的平均运行时间为 $\overline{t_A}(n)$。舍伍德算法通过构建概率模型，从历史数据中学习存在 $t_A(x)\gg\overline{t_A}(n)$ 的实例，改进算法使得新算法对问题的输入规模为 n 的每一个实例，均有 $t_{A'}(x)=\overline{t_A}(n)+s(x)$。当 $s(x)$ 与 $\overline{t_A}(n)$ 相比可以忽略时，舍伍德算法可以获得很好的平均性能。

10、 蒙特卡罗算法和拉斯维加斯算法是两类代表性的概率算法，其中蒙特卡罗可以出错，而拉斯维加斯算法从不出错但运行时间具有不确定性。

11、 旅行售货员问题的近似算法用到了三角不等式性质，即当费用函数满足三角不等式时，算法找出的旅行售货员回路的费用不会超过最优旅行售货员回路费用的 3 倍。

12、 常数近似比不保证问题属于 P 类。

13、 求一个图是否有一个最大的团的问题，又称图的最大团问题，是一个经典的 NP 难问题。

14、 析取范式的可满足性问题属于 P 类。

15、 证明一个问题 Q 是 NP 完全问题的基本思想是，首先证明 $Q \in NP$，然后再使用一个已知的 NP 完全问题 L 证明 $Q \leq_p L$。

二、解答题（共 30 分）

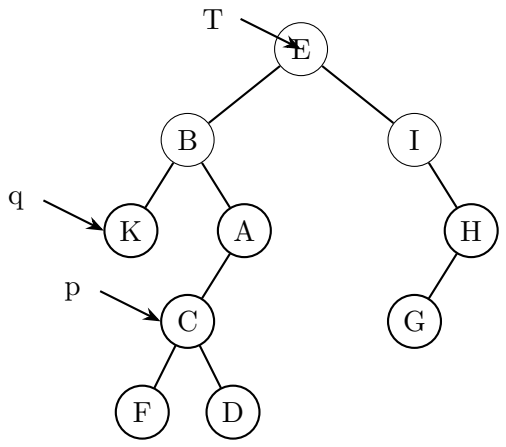
1. （10 分）二叉树算法分析

已知二叉树 T 采用二叉链表存储，其结点结构定义为：

```
typedef struct Node {
    char data;
    struct Node *lchild, *rchild;
} *BiTree;
```

设 p 和 q 分别指向二叉树 T 中的两个不同节点，请阅读下面算法，并回答问题。

```
BiTree Func(BiTree T, BiTree p, BiTree q) {
    BiTree lc, rc;
    if (T == NULL) return NULL;
    lc = Func(T->lchild, p, q);
    rc = Func(T->rchild, p, q);
    if ((lc && rc) || T == p || T == q) return T;
    if (lc) return lc;
    else return rc;
}
```



(1) 对于如图所示的二叉树 T（根为 E，左子树含 B, K, A, C, F, D，右子树含 I, H, G），若指针 p, q 分别指向二叉树 T 中节点 C 和 K，那么执行 `Func(T, p, q)` 后返回的指针是指向二叉树的哪个节点?

(2) 若指针 p 和 q 分别指向二叉树 T 中节点 A 和 C，那么执行 `Func(T, p, q)` 后返回的指针是指向二叉树的哪个节点?

(3) 请简述上面算法的功能。

(4) 该算法采用了哪种设计策略?

(5) 算法的时间复杂度是多少?

2. （10 分）任务分配问题

假定 n 项任务要分配给 m 个人，每个任务只能由 1 人完成，每个人可以承担多项任务，假定第 i 个人完成第 j 项任务的代价为 $cost(i,j)$。

(1) 设计一种贪心算法将 n 个任务进行分配，使完成的总代价最小。

(2) 证明你所设计贪心策略满足贪心选择性质。

(3) 用自己熟悉的程序设计语言，编写实现上述贪心算法的代码。

3. （10 分）多维背包问题

对于 0/1 背包问题加以推广，设有几种物品和一个背包，物品的重量是 $w[i]$，其价值为 $v[i]$，体积 $c[i]$，背包的重量限制是 W，且背包的体积限制是 V。如何选择装入背包的物品使得其总重量不超过 W，总体积不超过 V，且价值达到最大?

(1) 用组合优化的思想建立该问题的数学模型，定义选择变量，写出在变量定义下的目标函数和对应的约束条件。

(2) 设计一个算法求解该问题，说明算法设计思想，结合伪代码分析算法在最坏情况下的时间复杂度。

三、分析设计题（共 25 分）

1. （10 分）卫兵布置问题

一个博物馆由排成 $m \times n$ 个矩形阵列的陈列室组成。需要在陈列室中设立摄像头，每个摄像头可以监视所在的陈列室，且可以监视所在陈列室的上、下、左、右 4 个陈列室。给出一个最佳的摄像头布局方法，使得所有陈列室都在监视之下，但使用的摄像头数量最少。

2. （15 分）土堆合并问题

王老师在南门草坪搬运 N 堆土，依次排列，现在要将这 N 堆土合并成一堆，合并的代价与土堆的土方量成正比。请按下列要求设计并优化算法，使得 N 堆土最终合并成一堆所需的合并总费用最少。

(1) 说明该问题的最优子结构性质，设计一个时间复杂度为 $O(n^3)$ 的动态规划算法，写出动态规划的递归式，给出算法实现的伪代码，并结合伪代码说明时间复杂度；

(2) 按照《算法设计与分析》（第四版）教材 10.2 节中的方法，证明 (1) 中的递归式满足四边形不等式性质，再利用四边形不等式对 (1) 中的算法进行优化，给出一个加速后时间复杂度为 $O(n^2)$ 的新算法，给出算法实现的伪代码，并结合伪代码说明其时间复杂度；

(3) 按照《算法设计与分析》（第四版）教材 10.3 节中的方法，定义最小相容结点，给出最小相容合并算法；利用相同层序定理，设计一个算法，从最小相容合并树的根节点出发，递归地标记各结点的层序，再根据各结点的层序按相邻性规则重组，得到最优合并树。给出上述算法实现的伪代码，并结合伪代码说明为什么算法的时间复杂度进一步降至 $O(n \log n)$。